HUỲNH ĐỨC KHÁNH

Phương trình LƯỢNG GIÁC

QUY NHƠN - 2012

Mục lục

Huỳnh Đức Khánh - duckhanh0205@gmail.com - 0975.120.189

Phần 1. Các công thức cơ bản

1. Hệ thức cơ bản giữa các hàm số lượng giác

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\tan x \cot x = 1$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$

2. Hai cung đối nhau x và $-x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\tan(-x) = -\tan x$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cot(-x) = -\cot x$

3. Hai cung bù nhau x và $\pi - x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\cot(\pi - x) = -\cot x$

4. Hai cung phụ nhau x và $\dfrac{\pi}{2} - x$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

5. Hai cung hơn kém nhau π

$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\tan(\pi + x) = \tan x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\cot(\pi + x) = \cot x$

6. Hai cung hơn kém nhau $\dfrac{\pi}{2}$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$\cot\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x$

Phần 2. Các công thức liên hệ

1. Công thức cộng

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$\tan(a\pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a.\tan b}$

$\cot(a\pm b) = \dfrac{\cot a.\cot b \mp 1}{\cot a \pm \cot b}$

2. Công thức nhân đôi

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

$\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$

3. Công thức nhân ba

$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$

$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$\tan 3a = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$

$\cot 3a = \dfrac{\cot^3 a - 3\cot a}{3\cot^2 a - 1}$

4. Công thức hạ bậc

$\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

$\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$

$\sin^3 a = \dfrac{1}{4}(3\sin a - \sin 3a)$

$\cos^3 a = \dfrac{1}{4}(3\cos a + \cos 3a)$

$\tan 3a = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$

$\cot 3a = \dfrac{\cot^3 a - 3\cot a}{3\cot^2 a - 1}$

5. Công thức chia đôi

Nếu đặt $t = \tan \frac{a}{2} \quad (a \neq \pi + k2\pi)$. Khi đó ta có

$$\sin a = 2\sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \frac{2\tan \frac{a}{2}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{a}{2}}} = \frac{2\tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{a}{2}}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{2t}{1-t^2}$$

6. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right] \qquad \cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right] \qquad \tan a \tan b = \frac{\tan a + \tan b}{\cot a + \cot b}$$

7. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\sin a + \sin b = 2\sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \qquad \tan a \pm \tan b = \frac{\sin(a \pm b)}{\sin a \sin b}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \qquad \cot a \pm \cot b = \frac{\sin(b \pm a)}{\sin a \sin b}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

8. Công thức đặc biệt

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin a - \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$

Phần 3. Phương trình lượng giác

Dạng I - Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

1. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$

$$a\sin x + b = 0 \quad (a \neq 0)$$

Cách giải. Phương trình $\Leftrightarrow a\sin x = -b \Leftrightarrow \sin x = -\dfrac{b}{a}$

- Nếu $-\dfrac{b}{a} \notin [-1;1]$. Kết luận phương trình vô nghiệm.
- Nếu $-\dfrac{b}{a} \in [-1;1]$. Xét hai trường hợp sau

  i) $-\dfrac{b}{a} = \left\{0; \pm\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$. Khi đó phương trình trở thành

$$\boxed{\sin x = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

  ii) $-\dfrac{b}{a} \neq \left\{0; \pm\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$. Khi đó phương trình trở thành

$$\boxed{\sin x = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(-\dfrac{b}{a}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(-\dfrac{b}{a}\right) + k2\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

2. Phương trình bậc nhất đối với $\cos x$

$$a\cos x + b = 0 \quad (a \neq 0)$$

Cách giải. Phương trình $\Leftrightarrow a\cos x = -b \Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{b}{a}$

- Nếu $-\dfrac{b}{a} \notin [-1;1]$. Kết luận phương trình vô nghiệm.
- Nếu $-\dfrac{b}{a} \in [-1;1]$. Xét hai trường hợp sau

  i) $-\dfrac{b}{a} = \left\{0; \pm\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$. Khi đó phương trình trở thành

$$\boxed{\cos x = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

  ii) $-\dfrac{b}{a} \neq \left\{0; \pm\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$. Khi đó phương trình trở thành

$$\boxed{\cos x = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos\left(-\dfrac{b}{a}\right) + k2\pi \\ x = -\arccos\left(-\dfrac{b}{a}\right) + k2\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

3. Phương trình bậc nhất đối với $\tan x$

$$a\tan x + b = 0 \quad (a \neq 0)$$

Cách giải. Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Phương trình $\Leftrightarrow a\tan x = -b \Leftrightarrow \tan x = -\frac{b}{a}$

- Nếu $-\frac{b}{a} = \left\{0; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm\sqrt{3}\right\}$. Khi đó phương trình trở thành

$$\boxed{\tan x = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

- Nếu $-\frac{b}{a} \neq \left\{0; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm\sqrt{3}\right\}$. Khi đó phương trình trở thành

$$\boxed{\tan x = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

Công thức nghiệm đặc biệt

$\sin x = 1$	$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$	$\cos x = 1$	$\Leftrightarrow x = k2\pi$
$\sin x = -1$	$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$	$\cos x = -1$	$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$
$\sin x = 0$	$\Leftrightarrow x = k\pi$	$\cos x = 0$	$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Bài tập rèn luyện

Giải các phương trình lượng giác sau :

1) $2\sin 3x + \sqrt{3} = 0$

2) $\cos\left(x + 30^0\right) + 2\cos^2 15^0 = 1$

3) $2\cos\left(3x + \frac{3\pi}{5}\right) - \sqrt{2} = 0$

4) $\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 2 = 0$

5) $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$

6) $\tan\left(15^0 - 3x\right) + \sqrt{3} = 0$

Dạng II - Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

$$a\sin x + b\cos x = c$$

- Điều kiện để phương trình có nghiệm : $c^2 \le a^2 + b^2$.
- Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$ ta được phương trình

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

- Do $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$. Vì vậy ta đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$ suy ra $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$.
- Khi đó phương trình trở thành

$$\boxed{\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.}$$

Bài tập rèn luyện

Giải các phương trình lượng giác sau :

1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

2) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$

3) $3\sin x + 3\cos x = 2$

4) $3\sin x + 4\cos x = 5$

5) $3\sin x - 4\cos x = 3$

6) $3\sin x - 4\cos x = 4$

7) $3\sin x - 4\cos x = 0$

8) $4\cos x + 3\sin x = 0$

9) $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 2\cos 2x$

10) $\sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x = 2\sin 2x$

11) $\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin 2x$

12) $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}\cos x - \sin x$

13) $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + \sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$

14) $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + \sqrt{3}\sin x - \cos x = 4$

15) $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + \sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$

16) $\dfrac{\cos x - 2\sin x\cos x}{2\cos^2 x + \sin x - 1} = \sqrt{3}$

17) $\sqrt{3}\cos x + \sin x + \dfrac{6}{\sqrt{3}\cos x + \sin x + 1} = 4$

18) $3\cos x - 4\sin x + \dfrac{2}{3\cos x - 4\sin x - 6} = 3$

19) $2\sqrt{2}\cos 2x = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$

20) $\sqrt{3}\sin x + \cos x + 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 2$

Dạng III - Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

1. Phương trình bậc hai đối với $\sin x$

$$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Cách giải.

- Nếu $a+b+c=0$. Kết luận phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ \sin x = \dfrac{c}{a}\end{array}\right.$.
- Nếu $a-b+c=0$. Kết luận phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \sin x = -\dfrac{c}{a}\end{array}\right.$.
- Nếu $a \pm b + c \neq 0$. Ta đặt $t = \sin x$, do $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên điều kiện $-1 \leq t \leq 1$. Khi đó ta được phương trình
$$at^2 + bt + c = 0$$
giải phương trình bậc hai theo t và chọn t, thay $t = \sin x$ để tìm x.

2. Phương trình bậc hai đối với $\cos x$

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Cách giải.

- Nếu $a+b+c=0$. Kết luận phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1\\ \cos x = \dfrac{c}{a}\end{array}\right.$.
- Nếu $a-b+c=0$. Kết luận phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \cos x = -\dfrac{c}{a}\end{array}\right.$.
- Nếu $a \pm b + c \neq 0$. Ta đặt $t = \cos x$, do $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên điều kiện $-1 \leq t \leq 1$. Khi đó ta được phương trình
$$at^2 + bt + c = 0$$
giải phương trình bậc hai theo t và chọn t, thay $t = \cos x$ để tìm x.

3. Phương trình bậc hai đối với $\tan x$

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Cách giải. Giải như phương trình chứa $\sin x$ hoặc chứa $\cos x$.

Bài tập rèn luyện
Giải các phương trình lượng giác sau :

1) $2\sin^2\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) - 7\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) + 3 = 0$

2) $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) - 3\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) + 2 = 0$

3) $\tan^2 x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\tan x + \sqrt{3} = 0$

4) $3\tan^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) - 4\sqrt{3}\tan\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$

5) $\cos^4\dfrac{x}{2} + \sin^4\dfrac{x}{2} + 2\sin x = 1$

6) $4\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

Dạng IV - Phương trình bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

- Kiểm tra $\cos x = 0$ có là nghiệm của phương trình không ?
- Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$, ta thu được phương trình

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0.$$

Chú ý. Dạng $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$ *ta làm như sau*

$$\begin{aligned} & a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d \\ \Leftrightarrow\ & a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) \\ \Leftrightarrow\ & (a-d)\sin^2 x + b\sin x\cos x + (c-d)\cos^2 x = 0. \end{aligned}$$

Bài tập rèn luyện
Giải các phương trình lượng giác sau :

1) $\sin^2 x - \left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

2) $\sin^2 x - \left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 1$

3) $\sin^2 x - \left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = \sqrt{3}$

4) $\sin^2 x - \left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = -2$

5) $\sin^2 x - \left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cos x + \left(\sqrt{3}+1\right)\cos^2 x = -1$

6) $3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 2\cos 2x - 4\sin 2x = 0$

Dạng V - Phương trình đối xứng giữa $\sin x$ và $\cos x$

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$$

- Đặt $t = (\sin x + \cos x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Vì $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ nên $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.
  Khi đó : $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$, phương trình trở thành :

$$at + b\left(\frac{t^2-1}{2}\right) + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad bt^2 + 2at + 2c - b = 0.$$

- Giải phương trình bậc hai theo t và chọn t, thay $t = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ để tìm x.

Chú ý. Dạng $a(\sin x - \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$ *thì ta đặt* $t = (\sin x - \cos x)$.

Bài tập rèn luyện
Giải các phương trình lượng giác sau :

1) $3\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 2\sin x\cos x - 4 = 0$

2) $\left(1+\sqrt{3}\right)(\sin x + \cos x) - \sin 2x - \left(1+\sqrt{3}\right) = 0$

3) $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 2\sin 2x - 2 = 0$

4) $\cos^3 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + \sin^3 x = 0$

5) $(3 - \cos 4x)(\sin x - \cos x) = 2$

6) $\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3}$

Phần 4. Một vài thủ thuật

1. Các bước giải một phương trình lượng giác

- **Bước 1.** Tìm điều kiện để phương trình có nghĩa (nếu có). Các phương trình có chứa căn, có mẫu số, có tan hoặc cot thì cần có điều kiện.
- **Bước 2.** Sử dụng các phép biến đổi để đưa phương trình về 1 trong 5 dạng cơ bản.
- **Bước 3.** Giải và đối chiếu chọn nghiệm phù hợp.
- **Bước 4.** Kết luận nghiệm.

2. Các phương pháp giải phương trình lượng giác

- **Phương pháp 1.** Biến đổi đưa về dạng cơ bản.
- **Phương pháp 2.** Biến đổi phương trình về dạng tích : $A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$.
- **Phương pháp 3.** Biến đổi phương trình về dạng tổng bình phương : $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$.
- **Phương pháp 4.** Đánh giá hai vế :

$$A = B \quad \text{mà} \quad \begin{cases} A \le m \\ B \ge m \end{cases}. \text{ Do đó } A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = m \\ B = m \end{cases}.$$

3. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. (*Biến đổi về dạng cơ bản*) Giải phương trình sau:

$$\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2.$$

Lời giải. Phương trình đã cho

$$\begin{array}{llll}
\Leftrightarrow & 1 + \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 & \Leftrightarrow & \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2} & \Leftrightarrow & \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \\
\Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. & \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{array}$$

Ví dụ 2. (*Biến đổi về dạng tích*) Giải phương trình sau:

$$\cos^3 x + \sin^3 x + 2\sin^2 x = 1.$$

Lời giải. Phương trình đã cho

$$\begin{array}{ll}
\Leftrightarrow & \cos^3 x + \sin^3 x = 1 - 2\sin^2 x \\
\Leftrightarrow & \cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x \\
\Leftrightarrow & \cos^3 x + \sin^3 x = \cos^2 x - \sin^2 x \\
\Leftrightarrow & (\cos x + \sin x)(1 - \sin x\cos x) = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \\
\Leftrightarrow & \underbrace{(\cos x + \sin x)}_{\text{dạng 2}}\underbrace{[1 - \sin x\cos x - \cos x + \sin x]}_{\text{dạng 5}} = 0\ .
\end{array}$$

Ví dụ 3. (*Biến đổi về dạng tổng hai bình phương*) Giải phương trình sau:

$$3\tan^2 x + 4\sin^2 x - 2\sqrt{3}\tan x - 4\sin x + 2 = 0.$$

Lời giải. Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$.
Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 1 + 4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{3}\tan x - 1\right)^2 + (2\sin x - 1)^2 = 0.\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\sqrt{3}\tan x - 1 = 0\\ 2\sin x - 1 = 0\end{cases}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 4. (*Đánh giá hai vế*) Giải phương trình sau:

$$\sin^{2010} x + \cos^{2010} x = 1.$$

Lời giải. Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \sin^{2010} x + \cos^{2010} x = \sin^2 x + \cos^2 x\\
&\Leftrightarrow \quad \sin^2 x\left(\sin^{2008} x - 1\right) = \cos^2 x\left(1 - \cos^{2008} x\right). \quad (*)
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{cases}\sin^2 x \geq 0\\ \sin^{2008} x \leq 1\end{cases} \Rightarrow \sin^2 x\left(\sin^{2008} x - 1\right) \leq 0,\quad \forall x$$

và

$$\begin{cases}\cos^2 x \geq 0\\ \cos^{2008} x \leq 1\end{cases} \Rightarrow \cos^2 x\left(1 - \cos^{2008} x\right) \geq 0,\quad \forall x.$$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 x\left(\sin^{2008} x - 1\right) = 0\\ \cos^2 x\left(1 - \cos^{2008} x\right) = 0\end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2},\quad k \in \mathbb{Z}.$

4. Các nguyên tắc chung để giải phương trình

1. Biến đổi Phân tích thành phương trình tích theo nguyên tắc

- Lũy thừa $\longrightarrow$ Hạ bậc
- Tích $\longrightarrow$ Tổng
- Tổng $\longrightarrow$ Tích

2. Biến đổi không được thì đổi biến theo nguyên tắc

- Đặt : $t = \sin x,\quad t \in [-1;1]$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2\\
&\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2t^2\\
&\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{t^2}{1 - t^2}\\
&\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = 3t - 4t^3
\end{aligned}$$

- Đặt : $t = \cos x,\quad t \in [-1;1]$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2\\
&\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1\\
&\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - t^2}{t^2}\\
&\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4t^3 - 3t
\end{aligned}$$

5. Một số công thức đặc biệt

1) $\sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$

2) $\cos^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$

3) $\cos 2x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$

4) $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$

5) $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$

6) $1 + \cos 2x + \sin 2x = 2\cos x(\sin x + \cos x)$

7) $1 - \cos 2x + \sin 2x = 2\sin x(\sin x + \cos x)$

8) $1 + \tan x = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x}$

9) $1 + \tan x \tan \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{\cos x}$

10) $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \dfrac{3}{4}\sin 4x$

11) $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \cos^3 2x$

12) $\cos^4 x + \sin^4 x = \dfrac{3 + \cos 4x}{4}$

13) $\cos^6 x + \sin^6 x = \dfrac{5 + 3\cos 4x}{8}$

14) $\tan a \pm \tan b = \dfrac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}$

15) $\cot a \pm \cot b = \dfrac{\sin(b \pm a)}{\cos a \cos b}$

16) $\tan a + \cot anb = \dfrac{\cos(a - b)}{\cos a \sin b}$

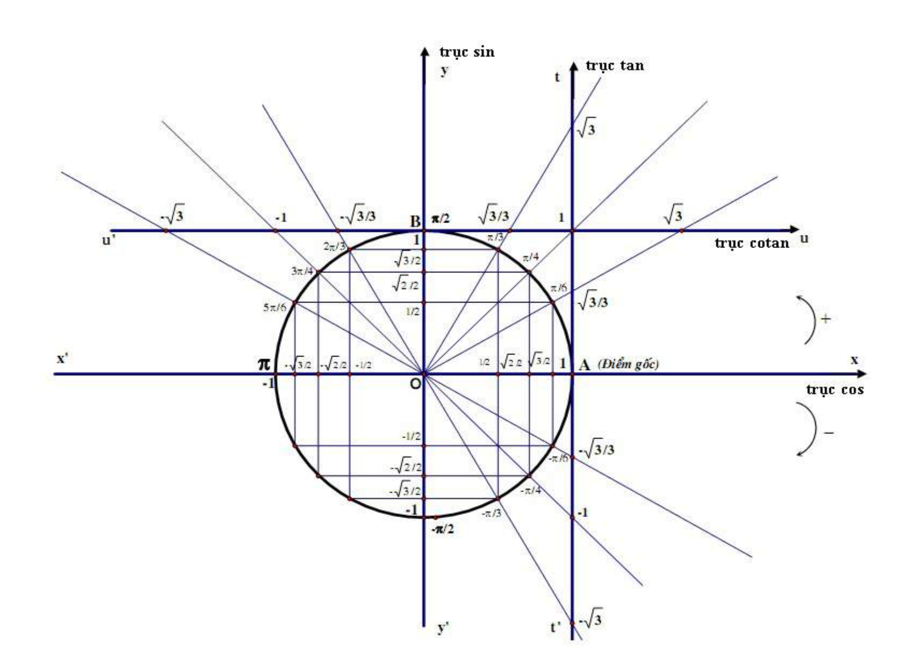
17) $\tan a - \cot b = \dfrac{-\cos(a + b)}{\cos a \sin b}$

18) $\tan a + \cot a = \dfrac{2}{\sin 2a}$

19) $\cot a - \tan a = 2\cot 2a$

20) $1 + \tan a \tan b = \dfrac{\cos(a - b)}{\cos a \cos b}$

6. Đường tròn lượng giác



Phần 5. Các đề thi Đại học

Bài 1. Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0;2\pi)$ của phương trình :

$$5\left(\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)=\cos 2x+3.$$

Chính thức khối A năm 2002

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin x\neq -\frac{1}{2}$.

• Ta có

$$\begin{aligned}5\left(\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right) &= 5\left(\frac{\sin x+2\sin x\sin 2x+\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)\\ = 5\left(\frac{\sin x+\cos x-\cos 3x+\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right) &= 5\left(\frac{\sin x+\cos x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)\\ = 5\left(\frac{(1+2\sin 2x)+\cos x}{1+2\sin 2x}\right) &= 5\cos x.\end{aligned}$$

• Khi đó với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}5\cos x=\cos 2x+3 &\Leftrightarrow 2\cos^2 x-5\cos x+2=0\\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=2 \quad (\text{loại})\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. &\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

• Vì $x\in(0;2\pi)$ nên ta chọn $x_1=\frac{\pi}{3},\ x_2=\frac{5\pi}{3}$. Ta thấy $x_1=\frac{\pi}{3},\ x_2=\frac{5\pi}{3}$ thỏa mãn điều kiện $\sin x\neq-\frac{1}{2}$.

Vậy các nghiệm cần tìm là $x_1=\frac{\pi}{3}$ và $x_2=\frac{5\pi}{3}$.

Bài 2. Giải phương trình : $\frac{2\sin x+\cos x+1}{\sin x-2\cos x+3}=\frac{1}{3}$.

Dự bị 1 khối A năm 2002

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow 3(2\sin x+\cos x+1)=\sin x-2\cos x+3\\ &\Leftrightarrow 5\sin x+5\cos x=0\\ &\Leftrightarrow \sin x+\cos x=0.\end{aligned}$$

Bài 3. Giải phương trình : $\tan x+\cos x-\cos^2 x=\sin x\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right)$.

Dự bị 2 khối A năm 2002

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos\frac{x}{2}\neq 0\end{cases}$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \tan x+\cos x-\cos^2 x=\sin x\frac{1}{\cos x} \quad\Leftrightarrow\quad \cos^2 x-\cos x=0.$$

Bài 4. Giải phương trình : $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$.

Chính thức khối B năm 2002

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \frac{1+\cos 6x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}-\frac{1-\cos 12x}{2}\\ &\Leftrightarrow \cos 6x-\cos 8x=\cos 12x-\cos 10x\\ &\Leftrightarrow 2\sin 7x\sin x=-2\sin 11x\sin x\\ &\Leftrightarrow \sin x(\sin 7x+\sin 11x)=0\end{aligned}$$

Bài 5. Giải phương trình : $\tan^4 x + 1 = \dfrac{\left(2 - \sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$.

Dự bị 1 khối B năm 2002

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x \neq 0$.
• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\cos^4 x} = \frac{\left(2 - \sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x} \quad \Leftrightarrow \quad \sin^4 x + \cos^4 x = \left(2 - \sin^2 2x\right)\sin 3x$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \left(2 - \sin^2 2x\right)\sin 3x \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \left(2 - \sin^2 2x\right)\sin 3x$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2 - \sin^2 2x\right) = \left(2 - \sin^2 2x\right)\sin 3x \quad \Leftrightarrow \quad \left(2 - \sin^2 2x\right)\left(\frac{1}{2} - \sin 3x\right) = 0.$$

Bài 6. Giải phương trình : $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5\sin 2x} = \dfrac{1}{2}\cot 2x - \dfrac{1}{8\sin 2x}$.

Dự bị 2 khối B năm 2002

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin 2x \neq 0$.
• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5\sin 2x} = \frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{1}{8\sin 2x} \quad \Leftrightarrow \quad 8\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) = 20\cos 2x - 5$$
$$\Leftrightarrow 8\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) = 20\cos 2x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad 8 - 4\sin^2 2x = 20\cos 2x - 5$$
$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x - 20\cos 2x + 9 = 0.$$

Bài 7. Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình :

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0.$$

Chính thức khối D năm 2002

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - 4\left(2\cos^2 x - 1\right) + 3\cos x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\cos^3 x - 8\cos^2 x = 0$$
$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x\left(\cos x - 2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0.$$

Bài 8. Giải phương trình : $\sqrt{\dfrac{1}{8\cos^2 x}} = \sin x$.

Dự bị 1 khối D năm 2002

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x \neq 0$.
• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \dfrac{1}{8\cos^2 x} = \sin^2 x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 1 = 8\cos^2 x\sin^2 x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 1 = 2\sin^2 2x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin 2x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Bài 9. Giải phương trình : $\cot x - 1 = \dfrac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

Chính thức khối A năm 2003

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases}$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)}{\cos x + \sin x} + \sin x\left(\sin x - \cos x\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \cos x - \sin x = \sin x \cos x\left(\cos x - \sin x\right) + \sin^2 x\left(\sin x - \cos x\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\cos x - \sin x\right)\left(1 - \sin x\cos x + \sin^2 x\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\cos x - \sin x\right)\left(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x\right) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 10. Giải phương trình : $\cos 2x + \cos x\left(2\tan^2 x - 1\right) = 2.$

Dự bị 1 khối A năm 2003

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x \neq 0$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\cos^2 x - 1\right) + \cos x\left(\frac{2\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}\right) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x\left(2\cos^2 x - 1\right) + \left(2 - 3\cos^2 x\right) = 2\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^3 x - 3\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\cos x + 1\right)\left(2\cos^2 x - 5\cos x + 2\right) = 0.$$

Bài 11. Giải phương trình : $3 - \tan x\left(\tan x + 2\sin x\right) + 6\cos x = 0.$

Dự bị 2 khối A năm 2003

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x \neq 0$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 3\cos^2 x - \sin x\left(\sin x + 2\sin x\cos x\right) + 6\cos^3 x = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 3\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x + 6\cos^3 x = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 3\cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) - 2\left(1 - \cos^2 x\right)\cos x + 6\cos^3 x = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \left(2\cos x + 1\right)\left(4\cos^2 x - 1\right) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 12. Giải phương trình : $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}.$

Chính thức khối B năm 2003

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin 2x \neq 0$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} + 4\sin 2x = \frac{1}{\sin x\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x - \sin^2 x + 4\sin x\cos x\sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x + 2\sin^2 2x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0.$$

Bài 13. Giải phương trình : $3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0.$

Dự bị 1 khối B năm 2003

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \quad 3\left(2\cos^2 2x - 1\right) - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6\cos^2 2x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -8\cos^6 x + 24\cos^4 x - 22\cos^2 x + 6 = 0.$$

Bài 14. Giải phương trình : $\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x - 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)}{2\cos x - 1} = 1.$

Dự bị 2 khối B năm 2003

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x \neq \dfrac{1}{2}$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \left(2-\sqrt{3}\right)\cos x - \left[1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\cos x - 1\\
&\Leftrightarrow \quad \left(2-\sqrt{3}\right)\cos x - \left(1 - \sin x\right) = 2\cos x - 1\\
&\Leftrightarrow \quad \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0.
\end{aligned}$$

Bài 15. Giải phương trình : $\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\tan^2x-\cos^2\frac{x}{2}=0.$

Chính thức khối D năm 2003

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x\neq 0$.
• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{1-\cos^2x}{1-\sin^2x}-\frac{1}{2}(1-\cos x)=0\\
&\Leftrightarrow\ (1-\sin x)\frac{1-\cos^2x}{1-\sin^2x}-(1-\cos x)=0\\
&\Leftrightarrow\ \frac{1-\cos^2x}{1+\sin x}-(1-\cos x)=0\\
&\Leftrightarrow\ 1-\cos^2x-(1+\sin x)(1-\cos x)=0\\
&\Leftrightarrow\ (1-\cos x)[(1+\cos x)-(1+\sin x)]=0\\
&\Leftrightarrow\ (1-\cos x)(\cos x-\sin x)=0.
\end{aligned}$$

Bài 16. Giải phương trình : $\frac{\cos^2x(\cos x-1)}{\sin x+\cos x}=2(1+\sin x).$

Dự bị 1 khối D năm 2003

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin x+\cos x\neq 0$.
• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ (\cos x-\sin x)(\cos x-1)=2(1+\sin x)\\
&\Leftrightarrow\ \cos^2x-\cos x-\sin x\cos x-\sin x-2=0\\
&\Leftrightarrow\ \left(\cos^2x-\cos x-2\right)-(\sin x\cos x+\sin x)=0\\
&\Leftrightarrow\ (\cos x+1)(\cos x-2)-\sin x(\cos x+1)=0\\
&\Leftrightarrow\ (\cos x+1)(\cos x-\sin x-2)=0.
\end{aligned}$$

Bài 17. Giải phương trình : $\cot x=\tan x+\frac{2\cos 4x}{\sin 2x}.$

Dự bị 2 khối D năm 2003

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin 2x\neq 0$.
• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow\ \frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos 4x}{\sin x\cos x}\quad\Leftrightarrow\quad \cos^2x=\sin^2x+\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow\ \cos^2x-\sin^2x=\cos 4x\qquad\Leftrightarrow\quad \cos 2x=\cos 4x.$$

Bài 18. Giải phương trình : $4\left(\sin^3x+\cos^3x\right)=\cos x+3\sin x.$

Dự bị 1 khối A năm 2004

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \cos x\left(1-4\cos^2x\right)+\sin x\left(3-4\sin^2x\right)=0\\
&\Leftrightarrow\ \cos x\left(1-4\cos^2x\right)+\sin x\left(4\cos^2x-1\right)=0\\
&\Leftrightarrow\ \left(1-4\cos^2x\right)(\cos x+\sin x)=0.
\end{aligned}$$

Bài19. Giải phương trình : $\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1-\cos x}=1.$

Dự bị 2 khối A năm 2004

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow\ 1-\sin x+2\sqrt{(1-\sin x)(1-\cos x)}+1-\cos x=1.$$

$$\Leftrightarrow\ 1-(\sin x+\cos x)+2\sqrt{1-(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x}=0.$$

Bài 20. Giải phương trình : $5\sin x - 2 = 3(1-\sin x)\tan^2 x$.

Chính thức khối B năm 2004

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x \neq 0$.
• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow\quad 5\sin x - 2 = 3(1-\sin x)\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \quad\Leftrightarrow\quad 5\sin x - 2 = \frac{3\sin^2 x}{1+\sin x}$$

$$\Leftrightarrow\quad (5\sin x - 2)(1+\sin x) = 3\sin^2 x \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0.$$

Bài 21. Giải phương trình : $2\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{\cos x}$.

Dự bị 1 khối B năm 2004

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin 2x \neq 0$.
• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow\quad 2(\cos x - \sin x) + \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2(\cos x - \sin x) + \frac{\cos x - \sin x}{\sin x\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad (\cos x - \sin x)\left(2 + \frac{1}{\sin x\cos x}\right) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (\cos x - \sin x)(\sin 2x + 1) = 0.$$

Bài 22. Giải phương trình : $\sin 4x\sin 7x = \cos 3x\cos 6x$.

Dự bị 2 khối B năm 2004

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 11x) = \frac{1}{2}(\cos 9x + \cos 3x)$$
$$\Leftrightarrow\quad \cos 11x = \cos 9x.$$

Bài 23. Giải phương trình : $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$.

Chính thức khối D năm 2004

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow\quad (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin x(2\cos x - 1)$$
$$\Leftrightarrow\quad (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x - \sin x) = 0$$
$$\Leftrightarrow\quad (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0.$$

Bài 24. Giải phương trình : $2\sin x\cos 2x + \sin 2x\cos x = \sin 4x\cos x$

Dự bị 1 khối D năm 2004

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow\quad 2\sin x\cos 2x + 2\sin x\cos^2 x = 2\sin 2x\cos 2x$$
$$\Leftrightarrow\quad 2\sin x\left(\cos 2x + \cos^2 x - 2\cos x\cos 2x\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow\quad 2\sin x\left[2\cos^2 x - 1 + \cos^2 x - 2\cos x\left(2\cos^2 x - 1\right)\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow\quad 2\sin x\left(-4\cos^3 x + 3\cos^2 x + 2\cos x - 1\right) = 0.$$

Bài 25. Giải phương trình : $\sin x + \sin 2x = \sqrt{3}(\cos x + \cos 2x)$.

Dự bị 2 khối D năm 2004

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow\quad \sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x$$
$$\Leftrightarrow\quad \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right).$$

Bài 26. Giải phương trình : $\cos^2 3x\cos 2x - \cos^2 x = 0.$

Chính thức khối A năm 2005

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)\cos 2x - \frac{1+\cos 2x}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 6x\cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(4\cos^3 2x - 3\cos 2x\right)\cos 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\cos^4 2x - 3\cos^2 2x - 1 = 0.$$

Bài 27. Giải phương trình : $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos x - \sin x = 0.$

Dự bị 1 khối A năm 2005

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]^3 - 3\cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^3 - 3\cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + 3\sin^2 x\cos x + 3\sin x\cos^2 x + \cos^3 x - 3\cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^3 x - \sin x = 0 \end{cases}$$

$$\text{hoặc} \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan^3 x + 3\tan x + 3\tan x + 1 - 3\left(1 + \tan^2 x\right) - \tan x\left(1 + \tan^2 x\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x = 1 \end{cases}.$$

Bài 28. Giải phương trình : $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2.$

Dự bị 2 khối A năm 2005

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \neq 0 \Leftrightarrow -\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq 0.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \cot x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1+\cos x) + \sin^2 x = 2\sin x(1+\cos x) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \cos x = 2\sin x(1+\cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)(1 - 2\sin x) = 0.$$

Bài 29. Giải phương trình : $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$

Chính thức khối B năm 2005

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow (1 + \sin 2x) + (\sin x + \cos x) + \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + \cos x) + \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left[(\sin x + \cos x) + 1 + (\cos x - \sin x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2\cos x + 1) = 0.$$

Bài 30. Giải phương trình : $\sin 2x + \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0.$

Dự bị 1 khối B năm 2005

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow (\sin 2x - \cos x) + (\cos 2x + 3\sin x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin 2x - \cos x) + \left(-2\sin^2 x + 3\sin x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) - (\sin x - 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x - \sin x + 1) = 0.$$

Bài 31. Giải phương trình : $4\sin^2\dfrac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos^2\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Dự bị 2 khối B năm 2005

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 2(1-\cos x)-\sqrt{3}\cos 2x=1+\left[1+\cos\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)\right]\\
&\Leftrightarrow\ 2(1-\cos x)-\sqrt{3}\cos 2x=2-\sin 2x\\
&\Leftrightarrow\ \sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\cos x\\
&\Leftrightarrow\ \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x\\
&\Leftrightarrow\ \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).
\end{aligned}$$

Bài 32. Giải phương trình : $\cos^4x+\sin^4x+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{3}{2}=0$.

Chính thức khối D năm 2005

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 1-2\sin^2x\cos^2x+\frac{1}{2}\left[\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin 2x\right]-\frac{3}{2}=0\\
&\Leftrightarrow\ 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\frac{1}{2}(-\cos 4x+\sin 2x)-\frac{3}{2}=0\\
&\Leftrightarrow\ 2-\sin^2 2x+\left(2\sin^2 2x+\sin 2x-1\right)-3=0\\
&\Leftrightarrow\ \sin^2 2x+\sin 2x-2=0.
\end{aligned}$$

Bài 33. Giải phương trình : $\sin x\cos 2x+\cos^2x\left(\tan^2x-1\right)+2\sin^3x=0$.

Dự bị 1 khối D năm 2005

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x\neq 0$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \sin x\cos 2x+\cos^2x\left(\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\cos^2x}\right)+2\sin^3x=0\\
&\Leftrightarrow\ \sin x\cos 2x+\left(\sin^2x-\cos^2x\right)+2\sin^3x=0\\
&\Leftrightarrow\ \sin x\cos 2x-\cos 2x+2\sin^3x=0\\
&\Leftrightarrow\ \sin x\left(1-2\sin^2x\right)-\left(1-2\sin^2x\right)+2\sin^3x=0\\
&\Leftrightarrow\ 2\sin^2x+\sin x-1=0.
\end{aligned}$$

Bài 34. Giải phương trình : $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-3\tan^2x=\dfrac{\cos 2x-1}{\cos^2x}$.

Dự bị 2 khối D năm 2005

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\neq 0\Leftrightarrow -\sin x\neq 0\Leftrightarrow \sin x\neq 0$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow\ -\cot x-3\tan^2x=\frac{-2\sin^2x}{\cos^2x}\qquad \Leftrightarrow\ -\cot x-3\tan^2x=-2\tan^2x$$

$$\Leftrightarrow\ -\cot x-\tan^2x=0\qquad \Leftrightarrow\ \tan^3x=1.$$

Bài 35. Giải phương trình : $\dfrac{2\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-\sin x\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0.$

Chính thức khối A năm 2006

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 2\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-\sin x\cos x\\
&\Leftrightarrow\ 2\left[\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^3-3\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\right]-\sin x\cos x=0\\
&\Leftrightarrow\ 2\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)-\frac{1}{2}\sin 2x=0\\
&\Leftrightarrow\ 3\sin^2 2x+\sin 2x-4=0.
\end{aligned}$$

Bài 36. Giải phương trình : $\cos 3x\cos^3 x-\sin 3x\sin^3 x=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{8}.$

Dự bị 1 khối A năm 2006

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \cos 3x4\cos^3 x-\sin 3x4\sin^3 x=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}\\
&\Leftrightarrow\ \cos 3x\left(\cos 3x+3\cos x\right)-\sin 3x\left(3\sin x-\sin 3x\right)=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}\\
&\Leftrightarrow\ \cos^2 3x+\sin^2 3x+3\left(\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x\right)=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}\\
&\Leftrightarrow\ \cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\Leftrightarrow\ \cos 4x=\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Bài 37. Giải phương trình : $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+4\sin x+1=0.$

Dự bị 2 khối A năm 2006

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 2\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)+4\sin x+1=0\\
&\Leftrightarrow\ \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+4\sin x+1=0\\
&\Leftrightarrow\ \sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x+4\sin x=0\\
&\Leftrightarrow\ 2\sin x\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x+2=0\right).
\end{aligned}$$

Bài 38. Giải phương trình : $\cot x+\sin x\left(1+\tan x\tan\dfrac{x}{2}\right)=4.$

Chính thức khối B năm 2006

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\\ \cos\dfrac{x}{2}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\sin 2x\neq 0.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow\ \frac{\cos x}{\sin x}+\sin x\left(\frac{\cos x\cos\frac{x}{2}+\sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}\right)=4\quad\Leftrightarrow\ \frac{\cos x}{\sin x}+\sin x\frac{1}{\cos x}=4$$

$$\Leftrightarrow\ \cos^2 x+\sin^2 x=4\sin x\cos x\qquad\Leftrightarrow\ \sin 2x=\frac{1}{2}.$$

Bài 39. Giải phương trình : $\left(2\sin^2 x-1\right)\tan^2 2x+3\left(2\cos^2 x-1\right)=0.$

Dự bị 1 khối B năm 2006

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos 2x\neq 0.$
• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(2\sin^2 x-1\right)\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}+3\left(2\cos^2 x-1\right)=0\\
&\Leftrightarrow -\left(1-2\sin^2 x\right)\frac{\sin^2 2x}{\left(1-2\sin^2 x\right)\cos 2x}+3\cos 2x=0\\
&\Leftrightarrow -\sin^2 2x+3\cos^2 2x=0\\
&\Leftrightarrow 4\sin^2 2x-3=0.
\end{aligned}$$

Bài 40. Giải phương trình : $\cos 2x+(1+2\cos x)(\sin x-\cos x)=0.$

Dự bị 2 khối B năm 2006

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x+(1+2\cos x)(\sin x-\cos x)=0\\
&\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)\left[(\cos x-\sin x)-(1+2\cos x)\right]=0\\
&\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(-\cos x-\sin x-1)=0.
\end{aligned}$$

Bài 41. Giải phương trình : $\cos 3x+\cos 2x-\cos x-1=0.$

Chính thức khối D năm 2006

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(4\cos^3 x-3\cos x\right)+\left(2\cos^2 x-1\right)-\cos x-1=0\\
&\Leftrightarrow 4\cos^3 x+2\cos^2 x-4\cos x-2=0\\
&\Leftrightarrow \left(\cos^2 x-1\right)(4\cos x+2)=0.
\end{aligned}$$

Bài 42. Giải phương trình : $\cos^3 x+\sin^3 x+2\sin^2 x=1.$

Dự bị 1 khối D năm 2006

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)^3-3\cos x\sin x(\cos x+\sin x)=1-2\sin^2 x\\
&\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)^3-3\cos x\sin x(\cos x+\sin x)=\cos^2 x-\sin^2 x\\
&\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)\left[(\cos x+\sin x)^2-3\cos x\sin x-(\cos x-\sin x)\right]=0\\
&\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)\left[1-\cos x\sin x-(\cos x-\sin x)\right]=0.
\end{aligned}$$

Bài 43. Giải phương trình : $4\sin^3 x+4\sin^2 x+3\sin 2x+6\cos x=0.$

Dự bị 2 khối D năm 2006

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$\Leftrightarrow \left(4\sin^3 x+4\sin^2 x\right)+(3\sin 2x+6\cos x)=0$ $\Leftrightarrow 4\sin^2 x(\sin x+1)+6\cos x(\sin x+1)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+1)\left(4\sin^2 x+6\cos x\right)=0$ $\Leftrightarrow (\sin x+1)\left(-4\cos^2 x+6\cos x+4\right)=0.$

Bài 44. Giải phương trình : $\left(1+\sin^2 x\right)\cos x+\left(1+\cos^2 x\right)\sin x=1+\sin 2x.$

Chính thức khối A năm 2007

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \cos x+\sin^2 x\cos x+\sin x+\cos^2 x\sin x=(\sin x+\cos x)^2\\
&\Leftrightarrow \cos x+\sin x+\sin x\cos x(\cos x+\sin x)=(\sin x+\cos x)^2\\
&\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)\left[1+\sin x\cos x-(\sin x+\cos x)\right]=0
\end{aligned}$$

Bài 45. Giải phương trình : $\sin 2x + \sin x - \frac{1}{2\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = 2\cot 2x.$

Dự bị 1 khối A năm 2007

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin 2x \neq 0$.
• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x \sin x - \cos x - 1 = 2\cos 2x\\
&\Leftrightarrow \left(\sin^2 2x - 1\right) + (\sin 2x \sin x - \cos x) - 2\cos 2x = 0\\
&\Leftrightarrow -\cos^2 2x + \cos x\left(2\sin^2 x - 1\right) - 2\cos 2x = 0\\
&\Leftrightarrow -\cos^2 2x - \cos x\cos 2x - 2\cos 2x = 0\\
&\Leftrightarrow -\cos 2x\,(\cos 2x + \cos x + 2) = 0\\
&\Leftrightarrow \cos 2x\left(2\cos^2 x + \cos x + 1\right) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 46. Giải phương trình : $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1 = 3\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right).$

Dự bị 2 khối A năm 2007

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \sin^2 x = 3\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\cos x + \sin x\right)^2 = 3\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\cos x + \sin x\right)\left(\sqrt{3}\cos x + \sin x - 3\right) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 47. Giải phương trình : $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x.$

Chính thức khối B năm 2007

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sin 7x - \sin x = 1 - 2\sin^2 2x\\
&\Leftrightarrow 2\cos 4x\sin 3x = \cos 4x\\
&\Leftrightarrow \cos 4x\,(2\sin 3x - 1) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 48. Giải phương trình : $\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}.$

Dự bị 1 khối B năm 2007

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}\\
&\Leftrightarrow \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}\\
&\Leftrightarrow 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}\\
&\Leftrightarrow -2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{3x}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}\\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}\left[1 + \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = 0.
\end{aligned}$$

Bài 49. Giải phương trình : $\dfrac{\sin 2x}{\cos x}+\dfrac{\cos 2x}{\sin x}=\tan x-\cot x.$

Dự bị 2 khối B năm 2007

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \frac{\sin 2x\sin x}{\cos x\sin x}+\frac{\cos x\cos 2x}{\cos x\sin x}=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}\\&\Leftrightarrow \sin 2x\sin x+\cos x\cos 2x=\sin^2 x-\cos^2 x\\&\Leftrightarrow \cos x=-\cos 2x\\&\Leftrightarrow \cos x=\cos(\pi+2x).\end{aligned}$$

Bài 50. Giải phương trình : $\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2.$

Chính thức khối D năm 2007

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow 1+2\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos x=2\\&\Leftrightarrow \sin x+\sqrt{3}\cos x=1.\end{aligned}$$

Bài 51. Giải phương trình : $2\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)\cos x=1.$

Dự bị 1 khối D năm 2007

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \sqrt{2}\left[\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)-\sin\frac{\pi}{12}\right]=1\\&\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)-\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}\\&\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}\\&\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}=\sin\frac{5\pi}{12}.\end{aligned}$$

Bài 52. Giải phương trình : $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x.$

Dự bị 2 khối D năm 2007

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x\neq 0$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}\right)(\sin x+\cos x)^2=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\\&\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)\left[(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)-1\right]=0\\&\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(\cos 2x-1)=0.\end{aligned}$$

Bài 53. Giải phương trình : $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}-x\right).$

Chính thức khối A năm 2008

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \sin\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=-2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\\&\Leftrightarrow \cos x+\sin x=-2\sqrt{2}\sin x\cos x(\sin x+\cos x)\\&\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)\left(1+\sqrt{2}\sin 2x\right)=0\ .\end{aligned}$$

Bài 54. Giải phương trình : $\tan x = \cot x + 4\cos^2 2x.$

Dự bị 1 khối A năm 2008

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + 4\cos^2 2x \quad \Leftrightarrow \sin^2 x = \cos^2 x + 4\sin x\cos x\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 4\sin x\cos x\cos^2 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \cos 2x + 2\sin 2x\cos^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\,(1 + 2\sin 2x\cos 2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \cos 2x\,(1 + \sin 4x) = 0.$$

Bài 55. Giải phương trình : $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Dự bị 2 khối A năm 2008

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \quad \Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = \sin x - \cos x + 1$$
$$\Leftrightarrow \sin 2x - (\cos 2x + 1) - \sin x + \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \sin 2x - 2\cos^2 x - \sin x + \cos x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos x\,(\sin x - \cos x) - (\sin x - \cos x) = 0 \quad \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\,(2\cos x - 1) = 0.$$

Bài 56. Giải phương trình : $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x\cos x.$

Chính thức khối B năm 2008

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\Leftrightarrow \left(\sin^3 x + \sqrt{3}\sin^2 x\cos x\right) - \left(\sqrt{3}\cos^3 x + \sin x\cos^2 x\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 x\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) - \cos^2 x\left(\sqrt{3}\cos x + \sin x\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)(-\cos 2x) = 0.$$

Bài 57. Giải phương trình : $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$

Dự bị 1 khối B năm 2008

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\Leftrightarrow 4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow 2\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) - \left(\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x + 2\sqrt{3}\cos x - \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x + 2\sqrt{3}\cos x - \sqrt{3}\sin 2x - 2\sin^2 x = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(2\sin x - 2\sin^2 x\right) + \left(2\sqrt{3}\cos x - \sqrt{3}\sin 2x\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x\,(1 - \sin x) + 2\sqrt{3}\cos x\,(1 - \sin x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\,(1 - \sin x)\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) = 0.$$

Bài 58. Giải phương trình : $3\sin x + \cos 2x + \sin 2x = 4\sin x\cos^2\frac{x}{2}.$

Dự bị 2 khối B năm 2008

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\Leftrightarrow 3\sin x + \cos 2x + \sin 2x = 2\sin x\,(1 + \cos x)$$
$$\Leftrightarrow 3\sin x + \cos 2x + \sin 2x = 2\sin x + \sin 2x$$
$$\Leftrightarrow \sin x + \cos 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0.$$

Bài 59. Giải phương trình : $2\sin x\left(1+\cos 2x\right)+\sin 2x=1+2\cos x.$

Chính thức khối D năm 2008

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad 2\sin x2\cos^2 x+\sin 2x=1+2\cos x\\&\Leftrightarrow\quad \sin 2x\left(2\cos x+1\right)=1+2\cos x\\&\Leftrightarrow\quad \left(2\cos x+1\right)\left(\sin 2x-1\right)=0.\end{aligned}$$

Bài 60. Giải phương trình : $4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+\cos 4x+\sin 2x=0.$

Dự bị 1 khối D năm 2008

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad 4\left(1-\sin^2 x\cos^2 x\right)+\cos 4x+\sin 2x=0\\&\Leftrightarrow\quad 4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)+1-2\sin^2 2x+\sin 2x=0\\&\Leftrightarrow\quad -4\sin^2 2x+\sin 2x+5=0.\end{aligned}$$

Bài 61. Giải phương trình : $\dfrac{\left(1-2\sin x\right)\cos x}{\left(1+2\sin x\right)\left(1-\sin x\right)}=\sqrt{3}.$

Chính thức khối A năm 2009

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\sin x\neq 1\\ \sin x\neq -\dfrac{1}{2}\end{cases}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad \left(1-2\sin x\right)\cos x=\sqrt{3}\left(1+2\sin x\right)\left(1-\sin x\right)\\&\Leftrightarrow\quad \cos x-\sin 2x=\sqrt{3}\left(1+\sin x-2\sin^2 x\right)\\&\Leftrightarrow\quad \cos x-\sin 2x=\sqrt{3}\left(\cos 2x+\sin x\right)\\&\Leftrightarrow\quad \cos x-\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x\\&\Leftrightarrow\quad \sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right).\end{aligned}$$

Bài 62. Giải phương trình : $\sin x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\left(\cos 4x+\sin^3 x\right).$

Chính thức khối B năm 2009

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad \sin x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x+2\sin^3 x\\&\Leftrightarrow\quad \left(\sin x-2\sin^3 x\right)+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x\\&\Leftrightarrow\quad \sin x\left(1-2\sin^2 x\right)+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x\\&\Leftrightarrow\quad \sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x\\&\Leftrightarrow\quad \sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x\\&\Leftrightarrow\quad \sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-4x\right).\end{aligned}$$

Bài 63. Giải phương trình : $\sqrt{3}\cos 5x-2\sin 3x\cos 2x-\sin x=0.$

Chính thức khối D năm 2009

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad \sqrt{3}\cos 5x-\left(\sin 5x+\sin x\right)-\sin x=0\\&\Leftrightarrow\quad \sqrt{3}\cos 5x-\sin 5x=2\sin x\\&\Leftrightarrow\quad \sin\left(\frac{\pi}{3}-5x\right)=\sin x.\end{aligned}$$

Bài 64. Giải phương trình : $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x.$

Chính thức khối A năm 2010

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \tan x\neq -1\end{cases}$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ (1+\sin x+\cos 2x)\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\,(1+\tan x)\\
&\Leftrightarrow\ (1+\sin x+\cos 2x)(\sin x+\cos x)=\cos x+\sin x\\
&\Leftrightarrow\ (1+\sin x+\cos 2x)(\sin x+\cos x)=\cos x+\sin x\\
&\Leftrightarrow\ (\sin x+\cos x)(1+\sin x+\cos 2x-1)=0\\
&\Leftrightarrow\ (\sin x+\cos x)(\sin x+\cos 2x)=0.
\end{aligned}$$

Bài 65. Giải phương trình : $(\sin 2x+\cos 2x)\cos x+2\cos 2x-\sin x=0.$

Chính thức khối B năm 2010

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \sin 2x\cos x+\cos 2x\cos x+2\cos 2x-\sin x=0\\
&\Leftrightarrow\ 2\sin x\cos^2 x-\sin x+\cos 2x\,(\cos x+2)=0\\
&\Leftrightarrow\ \sin x\left(2\cos^2 x-1\right)+\cos 2x\,(\cos x+2)=0\\
&\Leftrightarrow\ (\cos x+2)(\sin x+\cos 2x)=0.
\end{aligned}$$

Bài 66. Giải phương trình : $\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x-1=0.$

Chính thức khối D năm 2010

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ (\sin 2x-\cos x)-(\cos 2x-3\sin x+1)=0\\
&\Leftrightarrow\ \cos x\,(2\sin x-1)-\left(-2\sin^2 x-3\sin x+2\right)=0\\
&\Leftrightarrow\ \cos x\,(2\sin x-1)+(\sin x+2)(2\sin x-1)=0\\
&\Leftrightarrow\ (2\sin x-1)(\cos x+\sin x+2)=0.
\end{aligned}$$

Bài 67. Giải phương trình : $\dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x}=\sqrt{2}\sin x\sin 2x.$

Chính thức khối A năm 2011

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin x\neq 0$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 1+\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin x\sin 2x\left(1+\cot^2 x\right)\\
&\Leftrightarrow\ \sin 2x+2\cos^2 x=\sqrt{2}\sin x\sin 2x\frac{1}{\sin^2 x}\\
&\Leftrightarrow\ \sin 2x+2\cos^2 x=2\sqrt{2}\cos x\\
&\Leftrightarrow\ 2\cos x\left(\sin x+\cos x-\sqrt{2}\right)=0.
\end{aligned}$$

Bài 68. Giải phương trình : $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x.$

Chính thức khối B năm 2011

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 2\sin x\cos^2 x+\sin x\cos x=2\cos^2 x-1+\sin x+\cos x\\
&\Leftrightarrow\ \sin x\cos x\,(2\cos x+1)=\cos x\,(2\cos x+1)-1+\sin x\\
&\Leftrightarrow\ \cos x\,(2\cos x+1)(\sin x-1)=-1+\sin x\\
&\Leftrightarrow\ (\sin x-1)\left[\cos x\,(2\cos x+1)-1\right]=0\\
&\Leftrightarrow\ (\sin x-1)\left(2\cos^2 x+\cos x-1\right)=0.
\end{aligned}$$

Bài 69. Giải phương trình : $\dfrac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0.$

Chính thức khối D năm 2011

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\Leftrightarrow \sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow (\sin 2x + 2\cos x) - (\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow (\sin x + 1)(2\cos x - 1) = 0.$$

Bài 70. Giải phương trình : $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1.$

Chính thức khối A năm 2012

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos x + \cos 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos x\right) + (\cos 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\sqrt{3}\sin x - 1\right) + 2\cos^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow 2\cos x\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 1\right) = 0.$$

Bài 71. Giải phương trình : $2\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1.$

Chính thức khối B năm 2012

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(2\cos^2 x - 1\right) + \sqrt{3}\sin 2x = \cos x - \sqrt{3}\sin x \\ &\Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \cos x - \sqrt{3}\sin x \\ &\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right). \end{aligned}$$

Bài 72. Giải phương trình : $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 2x.$

Chính thức khối D năm 2012

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\sin 3x - \sin x) + (\cos 3x + \cos x) = \sqrt{2}\cos 2x \\ &\Leftrightarrow 2\cos 2x\sin x + 2\cos 2x\cos x = \sqrt{2}\cos 2x \\ &\Leftrightarrow \cos 2x\left(2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Phần 6. 100 Phương trình lượng giác trong các đề thi thử trên toàn quốc

Bài 1. Giải phương trình: $\dfrac{\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x}{\sin^2 x - 3\cos^2 x} = 1.$

Chuyên Lê Quý Đôn – BÌNH ĐỊNH 2012 lần 1

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin^2 x - 3\cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \tan^2 x \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sin^2 x - 3\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x + \sqrt{3}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = \sin^2 x - 3\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1 + \sqrt{3}\right)\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \left(\sqrt{3} + 3\right)\cos^2 x = 0.$$

Bài 2. Giải phương trình:

$$\frac{2\cos 2x - \sin 2x - 1}{\sin x + \cos x} - 1 = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin x + \cos x.$$

Chuyên Lê Quý Đôn – BÌNH ĐỊNH 2012 lần 2

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \tan x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\cos 2x - (1 + \sin 2x)}{\sin x + \cos x} - 1 = 2\left[\sin 2x\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos 2x\right] + \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad [2(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)] - 1 = \left(\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x\right) + \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 - 4\sin x = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\sin^2 x - 4\sin x = \sqrt{3}\sin 2x.$$

Bài 3. Giải phương trình: $\cos 2x + \sqrt{3}\cos x + 5\sin x = \sqrt{3}\sin 2x + 3.$

Chuyên Lê Quý Đôn – BÌNH ĐỊNH 2012 lần 3

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x + 5\sin x - 3 = \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\sin^2 x + 5\sin x - 2 = \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad -2(\sin x - 2)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\cos x(2\sin x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\sin x - 2)(2\sin x - 1) = \sqrt{3}\cos x(2\sin x - 1).$$

Bài 4. Giải phương trình: $\cot\frac{x}{2} - \frac{1+\cos 3x}{\sin 2x - \sin x} = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Chuyên Lê Quý Đôn – BÌNH ĐỊNH 2012 lần 4

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin 2x - \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x\,(2\cos x - 1) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x \neq 0\\ 2\cos x - 1 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq k\pi\\ x \neq \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\end{cases},\quad k \in \mathbb{Z}.$$

• Ta có :

$$\cot\frac{x}{2} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\cos x + 1}{\sin x}.$$

• Suy ra

$$\begin{aligned}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{1+\cos 3x}{\sin 2x - \sin x} &= \frac{\cos x + 1}{\sin x} - \frac{1+\cos 3x}{\sin 2x - \sin x} = \frac{(\cos x + 1)(2\cos x - 1) - (1 + \cos 3x)}{\sin 2x - \sin x}\\ &= \frac{2\cos^2 x + \cos x - 2 - \cos 3x}{\sin 2x - \sin x} = \frac{\left(2\cos^2 x - 2\right) + (\cos x - \cos 3x)}{\sin 2x - \sin x}\\ &= \frac{-2\sin^2 x + 2\sin 2x\sin x}{\sin 2x - \sin x} = \frac{2\sin x\,(\sin 2x - \sin x)}{\sin 2x - \sin x} = 2\sin x.\end{aligned}$$

Bài 5. Giải phương trình: $\sin^3 x + \cos^3 x + 2\cos^2 x = 1$.

Chuyên Lê Quý Đôn – BÌNH ĐỊNH 2011 lần 1

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \left(\sin^3 x + \cos^3 x\right) + \left(2\cos^2 x - 1\right) = 0\\ &\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x\right) + \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 0\\ &\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x + \cos x - \sin x) = 0.\end{aligned}$$

Bài 6. Giải phương trình: $\cot^2 x - \cot x.\cot 3x = 2$.

Chuyên Lê Quý Đôn – BÌNH ĐỊNH 2011 lần 2

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \sin 3x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq k\pi\\ x \neq \frac{k\pi}{3}\end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{3},\quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin x}\frac{\cos 3x}{\sin 3x} = 2\\ &\Leftrightarrow \cos^2 x\sin 3x - \cos x\cos 3x\sin x = 2\sin^2 x\sin 3x\\ &\Leftrightarrow \cos x\,(\cos x\sin 3x - \cos 3x\sin x) = 2\sin^2 x\sin 3x\\ &\Leftrightarrow \cos x\sin 2x = 2\sin^2 x\sin 3x\\ &\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos^2 x - \sin x\sin 3x\right) = 0\\ &\Leftrightarrow 2\sin x\left[1 - \sin^2 x - \sin x\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right)\right] = 0\\ &\Leftrightarrow 2\sin x\left(2\sin^2 x - 1\right)^2 = 0.\end{aligned}$$

Bài 7. Giải phương trình: $\sin^2 x + \frac{1+\sin x}{\cos x} - \frac{1}{2}\sin 2x = \cos x$.

Chuyên Lê Quý Đôn – BÌNH ĐỊNH 2010 lần 1

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \sin^2 x\cos x + 1 + \sin x - \sin x\cos^2 x = \cos^2 x\\ &\Leftrightarrow \sin^2 x\cos x + \left(1 - \cos^2 x\right) + \sin x\left(1 - \cos^2 x\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \sin^2 x\,(\cos x + 1 + \sin x) = 0.\end{aligned}$$

Bài 8. Giải phương trình: $\dfrac{4\cos 3x\cos x-2\cos 4x-4\cos x+\tan\dfrac{x}{2}\tan x+2}{2\sin x-\sqrt{3}}=0.$

Chuyên Lê Quý Đôn – BÌNH ĐỊNH 2010 lần 2

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\sin x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos\dfrac{x}{2}\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \text{ và } x\neq\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\ \dfrac{x}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \text{ và } x\neq\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x\neq\pi+k2\pi\\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow 4\cos 3x\cos x-2\cos 4x-4\cos x+\tan\frac{x}{2}\tan x+2=0\\&\Leftrightarrow 4.\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x)-2\cos 4x-4\cos x+\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\frac{\sin x}{\cos x}+2=0\\&\Leftrightarrow 2\cos 2x-4\cos x+\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x}+2=0\\&\Leftrightarrow 2\cos x\left(2\cos^2x-1\right)-4\cos^2x+(1-\cos x)+2\cos x=0\\&\Leftrightarrow 4\cos^3x-4\cos^2x-\cos x+1=0.\end{aligned}$$

Bài 9. Giải phương trình: $7\tan x+\cot x=2\left(3\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sin 2x}\right).$

Quốc học – QUY NHƠN 2012 lần 1

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad 7\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=2\left(3\sqrt{3}+\frac{1}{\sin 2x}\right)\\&\Leftrightarrow\quad 14\sin^2x+2\cos^2x=6\sqrt{3}\sin 2x+2\\&\Leftrightarrow\quad 12\sin^2x=6\sqrt{3}\sin 2x.\end{aligned}$$

Bài 10. Giải phương trình: $\sin^2 2x+\dfrac{1}{4}\sin^2x=\sin 2x\sin^2x.$

Quốc học – QUY NHƠN 2012 lần 2

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad \sin^2x\left(4\cos^2x+\frac{1}{4}-\sin 2x\right)=0\\&\Leftrightarrow\quad \sin^2x\left(4.\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1}{4}-\sin 2x\right)=0\\&\Leftrightarrow\quad \sin^2x\,(8\cos 2x-4\sin 2x+9)=0.\end{aligned}$$

Bài 11. Giải phương trình: $4\sin^2x+1=8\sin^2x\cos x+4\cos^2 2x.$

Quốc học – QUY NHƠN 2011 lần 2

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad 4\left(1-\cos^2x\right)+1=8\left(1-\cos^2x\right)\cos x+4\left(2\cos^2x-1\right)^2\\&\Leftrightarrow\quad 16\cos^4x-8\cos^3x-12\cos^2x+8\cos x-1=0\\&\Leftrightarrow\quad (2\cos x-1)\left(8\cos^3x-6\cos x+1\right)=0\\&\Leftrightarrow\quad (2\cos x-1)(2\cos 3x+1)=0.\end{aligned}$$

Bài 12*. Giải phương trình: $4\cos x - 2\sin x - \cos 2x = 3.$

Chuyên Phan Bội Châu – NGHỆ AN 2012 lần 1

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\quad 4\cos x - 2\sin x - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow\quad (\sin x + \cos x - 3)(\sin x - \cos x + 1) = 0. \end{aligned}$$

Bài 13. Giải phương trình: $\sqrt{3}(\sin 2x + \sin x) - \cos 2x + \cos x - 4 = 0.$

Chuyên Phan Bội Châu – NGHỆ AN 2012 lần 2

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x\right) + \left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right) = 4 \\ &\Leftrightarrow\quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 2 \\ &\Leftrightarrow\quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2. \end{aligned}$$

• Đặt $t = x + \frac{\pi}{6} \quad\Rightarrow\quad 2x - \frac{\pi}{6} = 2t - \frac{\pi}{2}$, khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} &\sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin t = 2 \\ \Leftrightarrow\quad &-\cos 2t + \sin t = 2 \\ \Leftrightarrow\quad &2\sin^2 t + \sin t - 3 = 0. \end{aligned}$$

Bài 14. Giải phương trình: $\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3}\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

Chuyên Phan Bội Châu – NGHỆ AN 2012 lần 3

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos x) + \sqrt{3}\left(\frac{1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos x) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin x + \sin 2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow\quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow\quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow\quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \\ &\Leftrightarrow\quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{7\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

Bài 15. Giải phương trình: $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

Chuyên Phan Bội Châu – NGHỆ AN 2011 lần 1

Hướng dẫn. • Đặt $t = x + \frac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad 2x = 2t - \frac{\pi}{2}$ và $3x - \frac{\pi}{4} = 3t - \pi$, khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} &\sin(3t - \pi) = \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)\sin t \\ \Leftrightarrow\quad &-\sin 3t = -\cos 2t \sin t \\ \Leftrightarrow\quad &-\sin 3t + \cos 2t \sin t = 0 \\ \Leftrightarrow\quad &\sin t\left(4\sin^2 t - 3 + 1 - 2\sin^2 x\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad &2\sin t\left(\sin^2 t - 1\right) = 0. \end{aligned}$$

Bài 16. Giải phương trình: $(\tan x\cot 2x-1)\sin\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\sin^4x+\cos^4x\right).$

Chuyên Phan Bội Châu – NGHỆ AN 2011 lần 2

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad \left(\frac{\sin x}{\cos x}\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-1\right)\cos 4x=-\frac{1}{2}\left[\left(\sin^2x+\cos^2x\right)^2-2\sin^2x\cos^2x\right]\\
&\Leftrightarrow\quad \left(\frac{\sin x\cos 2x-\cos x\sin 2x}{\cos x\sin 2x}\right)\cos 4x=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\\
&\Leftrightarrow\quad \left(\frac{-\sin x}{\cos x\sin 2x}\right)\cos 4x=-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\cos^2 2x}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow\quad \left(\frac{-1}{2\cos^2x}\right)\cos 4x=-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\cos^2 2x}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow\quad \left(2\cos^2 2x-1\right)=\cos^2x\left(\frac{1+\cos^2 2x}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow\quad \left(2\cos^2 2x-1\right)=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos^2 2x}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow\quad \cos^3 2x-7\cos^2 2x+\cos 2x+5=0\\
&\Leftrightarrow\quad (\cos 2x-1)\left(\cos^2 2x-6\cos 2x-5\right)=0.
\end{aligned}$$

Bài 17. Giải phương trình: $\frac{\cos x+\sin^3x}{\sin x-\sin^2x}=1+\sin x+\cot x.$

Chuyên Đại học Vinh – NGHỆ AN 2012 lần 1

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \sin x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad \cos x+\sin^3x=(1+\sin x)\left(\sin x-\sin^2x\right)+(1-\sin x)\cos x\\
&\Leftrightarrow\quad \cos x+\sin^3x=\sin x-\sin^3x+\cos x-\sin x\cos x\\
&\Leftrightarrow\quad 2\sin^3x-\sin x+\sin x\cos x=0\\
&\Leftrightarrow\quad \sin x\left(2\sin^2x-1+\cos x\right)=0\\
&\Leftrightarrow\quad \sin x\left(-2\cos^2x+\cos x+1\right)=0.
\end{aligned}$$

Bài 18. Giải phương trình: $\frac{\tan x\cos 3x+2\cos 2x-1}{1-2\sin x}=\sqrt{3}(\sin 2x+\cos x).$

Chuyên Đại học Vinh – NGHỆ AN 2012 lần 2

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{6}+k2\pi \text{ và } x\neq\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad \frac{\sin x\cos 3x+2\cos 2x\cos x-\cos x}{\cos x-\sin 2x}=\sqrt{3}(\sin 2x+\cos x)\\
&\Leftrightarrow\quad \sin x\cos 3x+\cos 3x+\cos x-\cos x=\sqrt{3}(\sin 2x+\cos x)(\cos x-\sin 2x)\\
&\Leftrightarrow\quad \sin x\cos 3x+\cos 3x=\sqrt{3}\left(\cos^2x-\sin^2 2x\right)\\
&\Leftrightarrow\quad \cos 3x(\sin x+1)=\sqrt{3}\cos^2x\left(1-4\sin^2x\right)\\
&\Leftrightarrow\quad \cos 3x(\sin x+1)=\sqrt{3}\cos^2x\left(4\cos^2x-3\right)\\
&\Leftrightarrow\quad \cos 3x(\sin x+1)=\sqrt{3}\cos x\left(4\cos^3x-3\cos x\right)\\
&\Leftrightarrow\quad \cos 3x(\sin x+1)=\sqrt{3}\cos x\cos 3x\\
&\Leftrightarrow\quad \cos 3x\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x+1\right)=0.
\end{aligned}$$

Bài 19*. Giải phương trình: $\sqrt{2(1-\sin 2x)}\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos 2x=0.$

Chuyên Đại học Vinh – NGHỆ AN 2012 lần 3

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt{2(1-\sin 2x)}\sin\left(\pi+x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2x-\sin^2x=0\\
&\Leftrightarrow -\sqrt{1-\sin 2x}.\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2x-\sin^2x=0\\
&\Leftrightarrow -\sqrt{1-\sin 2x}.(\sin x-\cos x)+\cos^2x-\sin^2x=0\\
&\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)\left(\sqrt{1-\sin 2x}+\cos x+\sin x\right)=0.
\end{aligned}$$

Bài 20. Giải phương trình: $\sin 3x+\sin 2x+\sin x+1=\cos 3x+\cos 2x-\cos x.$

Chuyên Đại học Vinh – NGHỆ AN 2012 lần 4

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\sin 3x+\sin x)+(\sin 2x+1)=(\cos 3x-\cos x)+\cos 2x\\
&\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x+(\sin x+\cos x)^2=-2\sin 2x\sin x+\left(\cos^2x-\sin^2x\right)\\
&\Leftrightarrow 2\sin 2x(\cos x+\sin x)+(\sin x+\cos x)^2-\left(\cos^2x-\sin^2x\right)=0\\
&\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)\left[2\sin 2x+(\sin x+\cos x)-(\cos x-\sin x)\right]=0\\
&\Leftrightarrow 2(\cos x+\sin x)(\sin 2x+\sin x)=0.
\end{aligned}$$

Bài 21. Giải phương trình: $(2\cos x-1)\cot x=\frac{3}{\sin x}+\frac{2\sin x}{\cos x-1}.$

Chuyên Đại học Vinh – NGHỆ AN 2011 lần 1

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq k2\pi\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{2\cos^2x-\cos x-3}{\sin x}=\frac{2\sin x}{\cos x-1}\\
&\Leftrightarrow \frac{(\cos x+1)(2\cos x-3)}{\sin x}=\frac{2\sin x}{\cos x-1}\\
&\Leftrightarrow (\cos x-1)(\cos x+1)(2\cos x-3)=2\sin^2x\\
&\Leftrightarrow -\sin^2x(2\cos x-3)=2\sin^2x\\
&\Leftrightarrow \sin^2x(2\cos x-1)=0.
\end{aligned}$$

Bài 22. Giải phương trình: $\frac{\sin 2x+\cos x-\sqrt{3}(\cos 2x+\sin x)}{2\sin 2x-\sqrt{3}}=0.$

Chuyên Đại học Vinh – NGHỆ AN 2011 lần 2

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin 2x\neq\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x\neq\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sin 2x+\cos x-\sqrt{3}(\cos 2x+\sin x)=0\\
&\Leftrightarrow \left(\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x\right)+\left(\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)+\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=0\\
&\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=0.
\end{aligned}$$

Bài 23. Giải phương trình: $(\sin 2x - \cos 2x)\tan x + \dfrac{\sin 3x}{\cos x} = \sin x + \cos x.$

Chuyên Đại học Vinh – NGHỆ AN 2011 lần 3

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \frac{(\sin 2x - \cos 2x)\sin x + \sin 3x}{\cos x} = \sin x + \cos x\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(\sin 2x \sin x - \cos 2x \sin x) + \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x}{\cos x} = \sin x + \cos x\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sin 2x(\sin x + \cos x)}{\cos x} = \sin x + \cos x\\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin x(\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x\\
&\Leftrightarrow \quad (\sin x + \cos x)(2\sin x - 1) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 24. Giải phương trình: $\sin 7x + \sin 9x = 2\left[\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + 2x\right)\right].$

Chuyên ĐHSP - HÀ NỘI 2012 lần 1

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \sin 7x + \sin 9x = 2\left[\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2} - \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)}{2}\right]\\
&\Leftrightarrow \quad \sin 7x + \sin 9x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \sin 7x + \sin 9x = \sin 2x + \sin 4x\\
&\Leftrightarrow \quad \sin 8x \cos x = \sin 3x \cos x\\
&\Leftrightarrow \quad \cos x(\sin 8x - \sin 3x) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 25. Giải phương trình: $\cos 3x - 2\sin 2x - \cos x - \sin x - 1 = 0.$

Chuyên ĐHSP - HÀ NỘI 2012 lần 2

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (\cos 3x - \cos x) - 2\sin 2x - (\sin x + 1) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad -2\sin 2x \sin x - 2\sin 2x - (\sin x + 1) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad -2\sin 2x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad (\sin x + 1)(2\sin 2x + 1) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 26. Giải phương trình:

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \left(\cos x + \sin x \tan\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{\cos x}.$$

Chuyên ĐHSP - HÀ NỘI 2012 lần 3

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \cos\dfrac{x}{2} \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ \dfrac{x}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x \neq \pi + k2\pi\end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 x} - \left(\frac{\cos x \cos\frac{x}{2} + \sin x \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right) = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)}{\cos x}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 x} - \left(\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right) = \frac{2\sin x \cos\frac{\pi}{3}}{\cos x}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{\sin x}{\cos x}\\
&\Leftrightarrow \quad 1 - \cos^2 x = \sin x \cos x\\
&\Leftrightarrow \quad \sin^2 x = \sin x \cos x\\
&\Leftrightarrow \quad \sin x(\sin x - \cos x) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 27. Giải phương trình: $\dfrac{1}{\cos^2x} - \dfrac{1}{\sin^2x} = \dfrac{8}{3}\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cot\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$.

Chuyên ĐHSP - HÀ NỘI 2012 lần 4

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0 \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x \neq k\pi \\ x+\dfrac{\pi}{3} \neq k\pi \\ \dfrac{\pi}{6}-x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{k\pi}{2} \\ x \neq -\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2} \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

• Ta có :

$$\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right) = \tan\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right] = \tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right).$$

• Suy ra :

$$\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right) = \cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = 1.$$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos^2x} - \frac{1}{\sin^2x} = \frac{8}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad 3\left(\sin^2x - \cos^2x\right) = 8\sin^2x\cos^2x \\
&\Leftrightarrow \quad -3\cos 2x = 2\sin^2 2x \\
&\Leftrightarrow \quad -3\cos 2x = 2\left(1-\cos^2 2x\right) \\
&\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Bài 28. Giải phương trình: $1+\sin x+\cos x = 2\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Chuyên ĐHSP - HÀ NỘI 2012 lần 5

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \left(1+\sin 2\frac{x}{2}\right)+\cos 2\frac{x}{2} = 2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = 2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)2\cos\frac{x}{2} = 2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right).\left(\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}-1\right) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 29. Giải phương trình: $\tan^2 3x\tan 5x + 2\tan 3x - \tan 5x = 0$.

Chuyên ĐHSP - HÀ NỘI 2012 lần 6

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos 5x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ 5x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3} \\ x \neq \dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k\pi}{5} \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \tan^2 3x\tan 5x+\tan 3x-(\tan 5x-\tan 3x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \tan 3x(\tan 3x\tan 5x+1)-(\tan 5x-\tan 3x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\left(\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\frac{\sin 5x}{\cos 5x}+1\right)-\left(\frac{\sin 5x}{\cos 5x}-\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\cos 2x-\sin 2x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sin 3x\cos 2x-\sin 2x\cos 3x = 0.
\end{aligned}$$

Bài 30. Giải phương trình:

$$3\sin^2 x\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x=\sin x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos x.$$

Chuyên ĐHSP - HÀ NỘI 2012 lần 7

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad 3\sin^2 x\sin x-\cos^2 x\cos x=\sin x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos x\\
&\Leftrightarrow\quad 3\sin^3 x+3\sin^2 x\cos x-\cos^3 x-\sin x\cos^2 x=0\\
&\Leftrightarrow\quad 3\sin^2 x\left(\sin x+\cos x\right)-\cos^2 x\left(\cos x+\sin x\right)=0\\
&\Leftrightarrow\quad \left(\sin x+\cos x\right)\left(3\sin^2 x-\cos^2 x\right)=0.
\end{aligned}$$

Bài 31. Giải phương trình:

$$4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+4\sqrt{3}\cos x\cos\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3}+x\right)=2.$$

Chuyên ĐHSP - HÀ NỘI 2012 lần 8

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad 2\sin x\left(\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}\cos x\left(\cos 2x+\cos\frac{2\pi}{3}\right)=2\\
&\Leftrightarrow\quad 2\sin x\cos 2x+\sin x+2\sqrt{3}\cos x\cos 2x-\sqrt{3}\cos x=2\\
&\Leftrightarrow\quad \left(\sin 3x-\sin x\right)+\sin x+\sqrt{3}\left(\cos 3x+\cos x\right)-\sqrt{3}\cos x=2\\
&\Leftrightarrow\quad \sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2.
\end{aligned}$$

Bài 32. Giải phương trình: $\sin^2 x\left(1+\tan x\right)=3\sin x\left(\cos x-\sin x\right)+3.$

Chuyên ĐHSP - HÀ NỘI 2011 lần 2

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad \sin^2 x\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)=3\sin x\cos x-3\sin^2 x+3\\
&\Leftrightarrow\quad \sin^2 x\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)=3\sin x\cos x+3\cos^2 x\\
&\Leftrightarrow\quad \sin^2 x\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)=3\cos x\left(\sin x+\cos x\right)\\
&\Leftrightarrow\quad \sin^2 x\left(\sin x+\cos x\right)=3\cos^2 x\left(\sin x+\cos x\right)\\
&\Leftrightarrow\quad \left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin^2 x-3\cos^2 x\right)=0.
\end{aligned}$$

Bài 33. Giải phương trình: $6\sin x-2\cos^3 x=5\sin 2x\cos x.$

Chuyên ĐHSP - HÀ NỘI 2011 lần 6

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad 6\sin x-2\cos^3 x=10\sin x\cos^2 x\\
&\Leftrightarrow\quad 6\sin x-2\cos^3 x=10\sin x\left(1-\sin^2 x\right)\\
&\Leftrightarrow\quad 10\sin^3 x-4\sin x-2\cos^3 x=0.
\end{aligned}$$

• Nếu $\cos x=0$, ta được $10\sin^3 x=0\Leftrightarrow\sin x=0$. (mâu thuẩn)

• Do đó $\cos x=0$ không là nghiệm của phương trình. Chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$, ta được

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad 10\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}-4\frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos^2 x}-2=0\\
&\Leftrightarrow\quad 10\tan^3 x-4\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-2=0\\
&\Leftrightarrow\quad 6\tan^3 x-4\tan x-2=0.
\end{aligned}$$

Bài 34. Giải phương trình: $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\cot 3x+\sin(\pi+2x)-\sqrt{2}\cos 5x=0.$

Chuyên ĐHSP - HÀ NỘI 2011 lần 7

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin 3x\neq 0\Leftrightarrow 3x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad \cos 2x\frac{\cos 3x}{\sin 3x}-\sin 2x-\sqrt{2}\cos 5x=0\\&\Leftrightarrow\quad \frac{\cos 2x\cos 3x-\sin 2x\sin 3x}{\sin 3x}-\sqrt{2}\cos 5x=0\\&\Leftrightarrow\quad \frac{\cos 5x}{\sin 3x}-\sqrt{2}\cos 5x=0\\&\Leftrightarrow\quad \cos 5x-\sqrt{2}\cos 5x\sin 3x=0\\&\Leftrightarrow\quad \cos 5x\left(1-\sqrt{2}\sin 3x\right)=0.\end{aligned}$$

Bài 35. Giải phương trình: $5\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)-9.$

Chuyên ĐHSP - HÀ NỘI 2010 lần 1

Hướng dẫn. • Đặt $t=\frac{5\pi}{6}-x\Rightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=2\pi-2t$, khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned}&\quad 5\cos(2\pi-2t)=4\sin t-9\\&\Leftrightarrow\quad 5\cos 2t=4\sin t-9\\&\Leftrightarrow\quad 5\left(1-2\sin^2 t\right)=4\sin t-9\\&\Leftrightarrow\quad 10\sin^2 t+4\sin t-14=0.\end{aligned}$$

Bài 36. Giải phương trình: $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+2\tan 2x+\cos 2x=0.$

Chuyên ĐHSP - HÀ NỘI 2010 lần 2

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos 2x\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+2\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\cos 2x=0\\&\Leftrightarrow\quad -(\sin x+\cos x)^2+2\sin 2x+\cos^2 2x=0\\&\Leftrightarrow\quad -(1+\sin 2x)+2\sin 2x+1-\sin^2 2x=0\\&\Leftrightarrow\quad \sin 2x(\sin 2x-1)=0.\end{aligned}$$

Bài 37. Giải phương trình: $2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin^2 x-\tan x.$

Chuyên ĐHSP - HÀ NỘI 2010 lần 3

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad 1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\sin^2 x\cos x-\sin x}{\cos x}\\&\Leftrightarrow\quad 1-\sin 2x=\frac{\sin x(2\sin x\cos x-1)}{\cos x}\\&\Leftrightarrow\quad 1-\sin 2x=\tan x(\sin 2x-1)\\&\Leftrightarrow\quad (1-\sin 2x)(1+\tan x)=0.\end{aligned}$$

Bài 38. Giải phương trình: $\sin^2 x + \dfrac{(1+\cos 2x)^2}{2\sin 2x} = 2\cos 2x.$

Chuyên ĐHSP - HÀ NỘI 2010 lần 4

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2},\quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \frac{\left(2\cos^2 x\right)^2}{4\sin x\cos x} = 2\cos 2x - \sin^2 x\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\cos^3 x}{\sin x} = 2\left(1 - 2\sin^2 x\right) - \sin^2 x\\
&\Leftrightarrow \quad \cos^3 x = \sin x\left(2 - 5\sin^2 x\right)\\
&\Leftrightarrow \quad 5\sin^3 x - 2\sin x + \cos^3 x = 0.
\end{aligned}$$

• Chia hai vế phương trình cho $\tan^3 x$ ta được

$$\begin{aligned}
&\quad 5\tan^3 x - 2\tan x\left(1 + \tan^2 x\right) + 1 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 3\tan^3 x - 2\tan x + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Bài 39. Giải phương trình: $\sin^3 x\,(1 + \cot x) + \cos^3 x\,(1 + \tan x) = 2\sqrt{\sin x\cos x}.$

Chuyên ĐHSP - HÀ NỘI 2010 lần 5

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2},\quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \sin^3 x\left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right) + \cos^3 x\left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) = 2\sqrt{\sin x\cos x}\\
&\Leftrightarrow \quad \sin^2 x\,(\sin x + \cos x) + \cos^2 x\,(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{\sin x\cos x}\\
&\Leftrightarrow \quad (\sin x + \cos x)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 2\sqrt{\sin x\cos x}\\
&\Leftrightarrow \quad \sin x + \cos x = 2\sqrt{\sin x\cos x}.
\end{aligned}$$

Bài 40. Giải phương trình: $\cot 2x - 2\tan 4x - \tan 2x = -4\sqrt{3}.$

Chuyên ĐHSP - HÀ NỘI 2010 lần 6

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\sin 2x \neq 0\\ \cos 2x \neq 0\\ \cos 4x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 4x \neq 0\\ \cos 4x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 8x \neq 0 \Leftrightarrow 8x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{8},\quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (\cot 2x - \tan 2x) - 2\tan 4x = -4\sqrt{3}\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right) - 2\frac{\sin 4x}{\cos 4x} = -4\sqrt{3}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\cos 4x}{\sin 2x\cos 2x} - 2\frac{\sin 4x}{\cos 4x} = -4\sqrt{3}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\cos 4x}{\sin 4x} - \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = -2\sqrt{3}\\
&\Leftrightarrow \quad \cos 8x = -\sqrt{3}\sin 8x\\
&\Leftrightarrow \quad \tan 8x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Bài 41. Giải phương trình: $\cos\left(\frac{\pi}{3}+3x\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-4x\right)+\cos x=1.$

Đại học Quốc Gia - Đại học KHTN - HÀ NỘI 2012 lần 1

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}+3x\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-4x\right)=1-\cos x\\
&\Leftrightarrow \quad 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{7x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{x}{2}\cos\left(\frac{7x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \sin\frac{x}{2}\left[\cos\left(\frac{7x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\frac{x}{2}\right]=0\\
&\Leftrightarrow \quad \sin\frac{x}{2}\left[\cos\left(\frac{7x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]=0\ .
\end{aligned}$$

Bài 42*. Giải phương trình: $1+4\cos x\cos 3x=\tan 5x.$

Đại học Quốc Gia - Đại học KHTN - HÀ NỘI 2012 lần 2

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos 5x\neq 0\Leftrightarrow 5x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5},\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sin x+4\sin x\cos x\cos 3x}{\sin x}=\tan 5x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin x+2\sin 2x\cos 3x}{\sin x}=\tan 5x\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sin x+(\sin 5x-\sin x)}{\sin x}=\tan 5x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin 5x}{\sin x}=\frac{\sin 5x}{\cos 5x}\\
&\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\sin 5x=0\\ \sin x=\cos 5x.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Bài 43*. Giải phương trình: $\sin x+1=\frac{3\cos 2x-5}{2\cos x-4}.$

Đại học Quốc Gia - Đại học KHTN - HÀ NỘI 2012 lần 3

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (\sin x+1)(2\cos x-4)=(3\cos 2x-5)\\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin x\cos x-3\cos 2x+2\cos x-4\sin x+1=0\\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin x\cos x+(1-3\cos 2x)+(2\cos x-4\sin x)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \sin x\cos x+2\sin^2 x-\cos^2 x+(\cos x-2\sin x)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \left(2\sin^2 x+\cos x\sin x-\cos^2 x\right)+(\cos x-2\sin x)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \left(2\sin^2 x+\cos x\sin x-\cos^2 x\right)+(\cos x-2\sin x)=0\\
&\Leftrightarrow \quad (\sin x+\cos x)(2\sin x-\cos x)+(\cos x-2\sin x)=0\\
&\Leftrightarrow \quad (2\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x-1)=0.
\end{aligned}$$

Bài 44. Giải phương trình: $2\cos^3 x=2\cos x+2\tan 2x+\sin x\sin 2x.$

Đại học Quốc Gia - Đại học KHTN - HÀ NỘI 2012 lần 4

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos 2x\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 2\cos x\left(1-\cos^2 x\right)+2\tan 2x+\sin x\sin 2x=0\\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x\cos x+2\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\sin x\sin 2x=0\\
&\Leftrightarrow \quad \sin x\sin 2x+2\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\sin x\sin 2x=0\\
&\Leftrightarrow \quad \sin 2x\left(\sin x+\frac{1}{\cos 2x}\right)=0.
\end{aligned}$$

Bài 45. Giải phương trình: $\cos 3x + \dfrac{1}{\cos x} = 1 + 4\cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)\cos\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right).$

Đại học Quốc Gia - Đại học KHTN - HÀ NỘI 2011 lần 1

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \cos 3x + \frac{1}{\cos x} = 1 + 2\left(\cos 2x - \cos\frac{4\pi}{3}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \cos 3x + \frac{1}{\cos x} = 2\cos 2x\\
&\Leftrightarrow \quad \cos x\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) + 1 = 2\cos x\left(2\cos^2 x - 1\right)\\
&\Leftrightarrow \quad 4\cos^4 x - 4\cos^3 x - 3\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 4\cos^3 x\left(\cos x - 1\right) - \left(\cos x - 1\right)\left(3\cos x + 1\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\cos x - 1\right)\left(4\cos^3 x - 3\cos x - 1\right) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 46*. Giải phương trình: $(1 + \tan x)\cos 5x = \sin x + \cos x + 2\cos 4x - 2\cos 2x.$

Đại học Quốc Gia - Đại học KHTN - HÀ NỘI 2011 lần 2

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \frac{(\cos x + \sin x)}{\cos x}(\cos 4x\cos x - \sin 4x\sin x) = \sin x + \cos x + 4\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right)\sin x\\
&\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x)\left(\cos 4x - 4\sin^2 x\cos 2x\right) = \sin x + \cos x + 4\sin^2 x\left(3 - 4\sin^2 x\right)\\
&\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x)\left(1 - \cos 4x + 4\sin^2 x\cos 2x\right) + 4\sin^2 x\left(3 - 4\sin^2 x\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x)\left(2\sin^2 2x + 4\sin^2 x\cos 2x\right) + 4\sin^2 x\left(3 - 4\sin^2 x\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x)\left[8\sin^2 x\left(1 - \sin^2 x\right) + 4\sin^2 x\left(1 - 2\sin^2 x\right)\right] + 4\sin^2 x\left(3 - 4\sin^2 x\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x)\left[8\sin^2 x\cos^2 x + 4\sin^2 x\left(1 - 2\sin^2 x\right)\right] + 4\sin^2 x\left(3 - 4\sin^2 x\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 4\sin^2 x\left(3 - 4\sin^2 x\right)(\cos x + \sin x + 1) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 47*. Giải phương trình: $\tan^2 x + 9\cot^2 x + \dfrac{2\cos 2x + 4}{\sin 2x} = 14.$

Đại học Quốc Gia - Đại học KHTN - HÀ NỘI 2011 lần 3

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \tan^2 x + 9\cot^2 x + \frac{3\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x\cos x} = 14\\
&\Leftrightarrow \quad \tan^2 x + 9\cot^2 x + 3\cot x + \tan x = 14.
\end{aligned}$$

• Đặt $t = \tan x \quad \Rightarrow \quad \cot x = \dfrac{1}{t}$. Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
&t^2 + \frac{9}{t^2} + \frac{3}{t} + t = 14\\
\Leftrightarrow \quad &t^4 + 9 + 3t + t^3 = 14t^2\\
\Leftrightarrow \quad &t^4 + t^3 - 14t^2 + 3t + 9 = 0.
\end{aligned}$$

Bài 48. Giải phương trình: $\sin 4x + \cos 3x + \cos x = 4\sin x + 2.$

Đại học Quốc Gia - Đại học KHTN - HÀ NỘI 2011 lần 4

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 4\sin x\cos x\cos 2x + \cos 3x + \cos x = 4\sin x + 2\\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin x(\cos 3x + \cos x) + \cos 3x + \cos x = 2(2\sin x + 1)\\
&\Leftrightarrow \quad (\cos 3x + \cos x)(2\sin x + 1) = 2(2\sin x + 1)\\
&\Leftrightarrow \quad (2\sin x + 1)(\cos 3x + \cos x - 2) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 49. Giải phương trình: $\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1+(\cos x-\sin x)^2}=\dfrac{1}{16}\sin 4x.$

Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh 2012 lần 1A

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}{2-\sin 2x}=\frac{1}{16}\sin 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad 16(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=2\sin 2x\cos 2x(2-\sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin x+\cos x)[8(1-\sin x\cos x)-\sin 2x(\cos x-\sin x)(2-\sin 2x)]=0.$$

Bài 50. Giải phương trình: $\dfrac{\cos^3 x-\sin^3 x}{1+(\cos x+\sin x)^2}=\dfrac{1}{4}\cos 2x.$

Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh 2012 lần 1B

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(\cos x-\sin x)(1+\sin x\cos x)}{2+\sin 2x}=\frac{1}{4}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(\cos x-\sin x)(1+\sin x\cos x)=\cos 2x(2+\sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos x-\sin x)[4(1+\sin x\cos x)-(\cos x+\sin x)(2+\sin 2x)]=0.$$

Bài 51. Giải phương trình:

$$16\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-3\sin 4x\left[2+\sqrt{2}(1+\tan x\tan 2x)\right]=10.$$

Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh 2012 lần 2A

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\end{cases}, \quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \quad 16\left(1-3\sin^2 x\cos^2 x\right)-3\sin 4x\left[2+\sqrt{2}\frac{(\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x)}{\cos x\cos 2x}\right]=10$$

$$\Leftrightarrow \quad 6-12\sin^2 2x-3\sin 4x\left[2+\sqrt{2}\frac{1}{\cos 2x}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6\left(1-2\sin^2 2x\right)-6\sin 4x-6\sqrt{2}\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 4x-\sin 4x=\sqrt{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)=\sin 2x.$$

Bài 52. Giải phương trình: $(\tan x \cot 2x - 1)\sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)$.

Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh 2012 lần 2B

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\frac{\sin x \cos 2x - \cos x \sin 2x}{\cos x \sin 2x}\right)\cos 4x = -\frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{-\sin x}{\cos x \sin 2x}\right)\cos 4x = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{-1}{2\cos^2 x}\right)\cos 4x = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 x\right)\\
&\Leftrightarrow \cos 4x = \cos^2 x\left(\frac{1+\cos^2 x}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = \frac{1+\cos 2x}{2}\left(\frac{1+\cos^2 x}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \cos^3 x - 7\cos^2 x + \cos x + 5 = 0.
\end{aligned}$$

Bài 53. Giải phương trình: $\cot x + \sin x\left(1 + \tan x.\tan\frac{x}{2}\right) = 4$.

Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh 2011 lần 1A

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\\ \cos\frac{x}{2} \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \cot x + \sin x\left(\frac{\cos x\cos\frac{x}{2} + \sin x \sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}\right) = 4\\
&\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4\\
&\Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 4\sin x\cos x\\
&\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Bài 54. Giải phương trình: $\sin 2x + 2\tan x = 3.$

Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh 2011 lần 1D

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad 2\sin x\cos x + 2\frac{\sin x}{\cos x} = 3\\
&\Leftrightarrow\quad 2\sin x\cos^2 x + 2\sin x = 3\cos x\\
&\Leftrightarrow\quad 2\tan x + 2\tan x\left(1+\tan^2 x\right) = 3\left(1+\tan^2 x\right)\\
&\Leftrightarrow\quad 2\tan^3 x - 3\tan^2 x + 4\tan x - 3 = 0\\
&\Leftrightarrow\quad (\tan x - 1)\left(2\tan^2 x - \tan x + 3\right) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 55. Giải phương trình: $\sin x\cos 2x + \cos^2 x\left(\tan^2 x - 1\right) + 2\sin^3 x = 0.$

Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh 2010 lần 1A

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad \sin x\cos 2x + \cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}\right) + 2\sin^3 x = 0\\
&\Leftrightarrow\quad \sin x\cos 2x + \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) + 2\sin^3 x = 0\\
&\Leftrightarrow\quad \sin x\left(1 - 2\sin^2 x\right) + \left(2\sin^2 x - 1\right) + 2\sin^3 x = 0\\
&\Leftrightarrow\quad 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Bài 56. Giải phương trình: $\tan x + \cot x = 2\left(\sin 2x + \cos 2x\right).$

Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh 2010 lần 1B

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2},\quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2\left(\sin 2x + \cos 2x\right)\\
&\Leftrightarrow\quad \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x} = 2\left(\sin 2x + \cos 2x\right)\\
&\Leftrightarrow\quad 1 = \sin 2x\left(\sin 2x + \cos 2x\right)\\
&\Leftrightarrow\quad 1 - \sin^2 2x = \sin 2x\cos 2x\\
&\Leftrightarrow\quad \cos^2 2x = \sin 2x\cos 2x\\
&\Leftrightarrow\quad \cos 2x\left(\cos 2x - \sin 2x\right) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 57. Giải phương trình: $5\sin 2x - 2 = 3(\sin x - \cos x)^2\tan^2 2x.$

Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh 2010 lần 2A

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad 5\sin 2x - 2 = 3(\sin x - \cos x)^2\frac{\sin^2 2x}{(\cos x - \sin x)^2(\cos x + \sin x)^2}\\
&\Leftrightarrow\quad 5\sin 2x - 2 = \frac{3\sin^2 2x}{1 + \sin 2x}\\
&\Leftrightarrow\quad (5\sin 2x - 2)\left(1 + \sin 2x\right) = 3\sin^2 2x\\
&\Leftrightarrow\quad 2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Bài 58. Giải phương trình: $5\sin x - 2 = 3(1-\sin x)\tan^2 x.$

Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh 2010 lần 2B

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 5\sin x - 2 = 3(1-\sin x)\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\\
&\Leftrightarrow \quad 5\sin x - 2 = \frac{3\sin^2 x}{1+\sin x}\\
&\Leftrightarrow \quad (5\sin x - 2)(1+\sin x) = 3\sin^2 x\\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Bài 59. Giải phương trình: $3 - \tan x(\tan x + 2\sin x) + 6\cos x = 0.$

Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh 2010 lần 2D

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 3 - \frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{\sin x}{\cos x} + 2\sin x\right) + 6\cos x = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 3\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x + 6\cos^3 x = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 3\cos^2 x(1+2\cos x) - \sin^2 x(1+2\cos x) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad (1+2\cos x)\left(3\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 60*. Giải phương trình: $3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = \left(2+3\sqrt{2}\right)\cos x.$

Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh 2010 lần 3A

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 3\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2\sqrt{2}\sin^2 x = 2\cos x + 3\sqrt{2}\cos x\\
&\Leftrightarrow \quad 3\cos x\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \sqrt{2}\right) + 2\left(\sqrt{2}\sin^2 x - \cos x\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{2}\sin^2 x - \cos x\right)\left(2 - \frac{3\cos x}{\sin^2 x}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Cách khác Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 3\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2\sqrt{2}\sin^2 x = 2\cos x + 3\sqrt{2}\cos x\\
&\Leftrightarrow \quad 3\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin^4 x = \left(2+3\sqrt{2}\right)\cos x\sin^2 x\\
&\Leftrightarrow \quad 3\cos^2 x + 2\sqrt{2}\left(1-\cos^2 x\right)^2 = \left(2+3\sqrt{2}\right)\cos x\left(1-\cos^2 x\right)\\
&\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{2}\cos^4 x + \left(2+3\sqrt{2}\right)\cos^3 x + \left(3-4\sqrt{2}\right)\cos^2 x - \left(2+3\sqrt{2}\right)\cos x + 2\sqrt{2} = 0.
\end{aligned}$$

Bài 61. Giải phương trình: $\dfrac{\left(\sqrt{3}-2\right)\cos x - 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{4\sin^2\dfrac{x}{2} - 1} = 1.$

Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh 2010 lần 3B

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin^2\dfrac{x}{2} \neq \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x \neq \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{3}-2\right)\cos x - 1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 4\sin^2\frac{x}{2} - 1\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{3}-2\right)\cos x - 1 + \sin x = 2(1-\cos x) - 1\\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\cos x + \sin x = 2.
\end{aligned}$$

Bài 62. Giải phương trình: $\dfrac{3(\cot x + \cos x)}{\cot x - \cos x} = 2(1 + \sin x)$.

Chuyên Nguyễn Huệ - HÀ NỘI 2012 lần 1

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cot x - \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{3\left(\frac{\cos x}{\sin x} + \cos x\right)}{\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x} = 2(1 + \sin x) \\ &\Leftrightarrow \frac{3(1 + \sin x)}{1 - \sin x} = 2(1 + \sin x) \\ &\Leftrightarrow (1 + \sin x)[3 - 2(1 - \sin x)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 + \sin x)(1 + 2\sin x) = 0\ . \end{aligned}$$

Bài 63. Giải phương trình: $\dfrac{\cos^3 x - \cos^2 x}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x)$.

Chuyên Nguyễn Huệ - HÀ NỘI 2012 lần 2

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \cos^2 x(\cos x - 1) = 2(1 + \sin x)(\sin x + \cos x) \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \sin^2 x\right)(\cos x - 1) = 2(1 + \sin x)(\sin x + \cos x) \\ &\Leftrightarrow (1 + \sin x)[(1 - \sin x)(\cos x - 1) - 2(\sin x + \cos x)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 + \sin x)(\sin x + \cos x + \sin x\cos x + 1) = 0. \end{aligned}$$

Bài 64. Giải phương trình: $2\cos 6x + 2\cos 4x - \sqrt{3}\cos 2x = \sin 2x + \sqrt{3}.$

Chuyên Nguyễn Huệ - HÀ NỘI 2012 lần 3

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 4\cos 5x\cos x - \sqrt{3}\cos 2x - \sqrt{3} - \sin 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\cos 5x\cos x - \sqrt{3}(\cos 2x + 1) - \sin 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\cos 5x\cos x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - \sin 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\cos x\left(2\cos 5x - \sqrt{3}\cos x - \sin x\right) = 0. \end{aligned}$$

Bài 65*. Giải phương trình: $7\left(\dfrac{\sin 3x - \cos 3x}{2\sin 2x - 1} - \cos x\right) = 4 - \cos 2x.$

Chuyên Nguyễn Huệ - HÀ NỘI 2012 lần 4

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin 2x \neq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x \neq \dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 7\left(\frac{3\sin x - 4\sin^3 x - 4\cos^3 x + 3\cos x}{2\sin 2x - 1} - \cos x\right) = 4 - \left(1 - 2\sin^2 x\right) \\ &\Leftrightarrow 7\left(\frac{3(\sin x + \cos x) - 4(\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x)}{2\sin 2x - 1} - \cos x\right) = 2\sin^2 x + 3 \\ &\Leftrightarrow 7\left(\frac{(\sin x + \cos x)(3 - 4(1 - \sin x\cos x))}{2\sin 2x - 1} - \cos x\right) = 2\sin^2 x + 3 \\ &\Leftrightarrow 7\left(\frac{(\sin x + \cos x)(2\sin 2x - 1)}{2\sin 2x - 1} - \cos x\right) = 2\sin^2 x + 3 \\ &\Leftrightarrow 7\sin x = 2\sin^2 x + 3. \end{aligned}$$

Bài 66. Giải phương trình: $1+3\cos x+\cos 2x-2\cos 3x=4\sin x\sin 2x$.

Chuyên Nguyễn Huệ - HÀ NỘI 2011 lần 1

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ 1+3\cos x+\left(2\cos^2 x-1\right)-2\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)=8\sin^2 x\cos x\\&\Leftrightarrow\ 1+3\cos x+\left(2\cos^2 x-1\right)-2\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)=8\left(1-\cos^2 x\right)\cos x\\&\Leftrightarrow\ 2\cos^2 x+\cos x=0.\end{aligned}$$

Bài 67. Giải phương trình: $\dfrac{1}{\tan x+\cot 2x}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos x-\sin x\right)}{\cot x-1}$.

Chuyên Nguyễn Huệ - HÀ NỘI 2011 lần 2

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\cos x\neq 0\\\sin 2x\neq 0\\\cos x-\sin x\neq 0\\\tan x+\cot 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{k\pi}{2}\\x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ \frac{1}{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos x-\sin x\right)\sin x}{\cos x-\sin x}\\&\Leftrightarrow\ \sin 2x=\sqrt{2}\sin x\\&\Leftrightarrow\ \sin x\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)=0.\end{aligned}$$

Bài 68. Giải phương trình: $2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin^2 x-\tan x$.

Chuyên Nguyễn Huệ - HÀ NỘI 2011 lần 3

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ 1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin^2 x-\frac{\sin x}{\cos x}\\&\Leftrightarrow\ 1-\sin 2x=\frac{2\sin^2 x\cos x-\sin x}{\cos x}\\&\Leftrightarrow\ 1-\sin 2x=\frac{\sin x\left(\sin 2x-1\right)}{\cos x}\\&\Leftrightarrow\ 1-\sin 2x=\tan x\left(\sin 2x-1\right)\\&\Leftrightarrow\ \left(1-\sin 2x\right)\left(1-\tan x\right)=0.\end{aligned}$$

Bài 69. Giải phương trình: $\dfrac{\sin 2x}{\sin x+\cos x}+\dfrac{1}{\sqrt{2}\tan x}=2\cos x$.

Chuyên Nguyễn Huệ - HÀ NỘI 2011 lần 4

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\sin x+\cos x\neq 0\\\tan x\neq 0\\\cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0\\\sin x\neq 0\\\cos x\neq 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0\\\sin 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\x\neq\dfrac{k\pi}{2}\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ \frac{\sin 2x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos x}{\sqrt{2}\sin x}=2\cos x\\&\Leftrightarrow\ \sqrt{2}\sin x\sin 2x+\cos x\left(\sin x+\cos x\right)=2\sqrt{2}\sin x\cos x\left(\sin x+\cos x\right)\\&\Leftrightarrow\ \cos x\left(\sin x+\cos x\right)=2\sqrt{2}\sin x\cos^2 x\\&\Leftrightarrow\ \cos x\left(\sin x+\cos x-2\sqrt{2}\sin x\cos x\right)=0.\end{aligned}$$

Bài 70. Giải phương trình: $\sin\frac{5x}{2} = 5\cos^3 x\sin\frac{x}{2}$.

Chuyên Lê Quý Đôn - QUẢNG TRỊ 2010 lần 1A

Hướng dẫn. • Nếu $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$, ta có

$$\sin\frac{5x}{2} = \sin\left(\frac{5\pi}{2} + k5\pi\right) = \pm 1 \quad \text{và} \quad 5\cos^3 x\sin\frac{x}{2} = 5\cos^3(\pi + k2\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pm 5.$$

• Do đó $\cos\frac{x}{2} = 0$ không là nghiệm của phương trình nên nhân hai vế cho $\cos\frac{x}{2}$ ta được

$$\begin{aligned}
& \sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 5\cos^3 x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin 2x) = \frac{5}{2}\cos^3 x\sin x \\
\Leftrightarrow\ & \sin 3x + \sin 2x = 5\cos^3 x\sin x \\
\Leftrightarrow\ & 3\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin x\cos x = 5\cos^3 x\sin x \\
\Leftrightarrow\ & \sin x\left(3 - 4\sin^2 x + 2\cos x - 5\cos^3 x\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin x\left(5\cos^3 x - 4\cos^2 x - 2\cos x + 1\right) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 71. Giải phương trình: $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1 = 3\sin x + 3\sqrt{3}\cos x$.

Chuyên Lê Quý Đôn - QUẢNG TRỊ 2010 lần 1D

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & 1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + 1 = 3\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) \\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + 2 = 3\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

• Đặt $t = x + \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = 2t - \frac{\pi}{2}$, phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
& \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 3\sin t \\
\Leftrightarrow\ & -\cos 2t + 1 = 3\sin t \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin^2 t = 3\sin t \\
\Leftrightarrow\ & \sin t(2\sin t - 3) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 72. Giải phương trình: $2\tan x + \cot 2x = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}$.

Chuyên Lê Quý Đôn - QUẢNG TRỊ 2010 lần 2D

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & \frac{2\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x} \\
\Leftrightarrow\ & 4\sin^2 x + \cos 2x = 2\sin^2 2x + 1 \\
\Leftrightarrow\ & 4\sin^2 x + \cos 2x - 1 - 2\sin^2 2x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4\sin^2 x - 2\sin^2 x - 2\sin^2 2x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin^2 x - 2\sin^2 2x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin^2 x\left(1 - 4\cos^2 x\right) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 73. Giải phương trình: $4\sin 3x + \sin 5x - 2\sin x\cos 2x = 0.$

Chuyên Lê Quý Đôn - QUẢNG TRỊ 2011 lần 1A

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow 4\sin 3x + \sin 5x - (\sin 3x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow 3\sin 3x + \sin 5x + \sin x = 0$$
$$\Leftrightarrow 3\sin 3x + 2\sin 3x\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x(3 + 2\cos 2x) = 0.$$

Bài 74. Giải phương trình: $\dfrac{(1+\cos 2x)\sin 2x}{1-\sin x} = 2(\sin 3x + \sin x)(1+\sin x).$

Chuyên Lê Quý Đôn - QUẢNG TRỊ 2011 lần 1D

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow (1+\cos 2x)\sin 2x = 2(\sin 3x + \sin x)(1+\sin x)(1-\sin x)$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x\sin 2x = 2(2\sin 2x\cos x)\cos^2 x$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x\sin 2x = 4\sin 2x\cos x\cos^2 x$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x\sin 2x(1-2\cos x) = 0.$$

Bài 75. Giải phương trình: $\dfrac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} + 1 = 0.$

Chuyên Lê Quý Đôn - QUẢNG TRỊ 2011 lần 2A

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x + \sin 2x + \cos 3x}{\cos 3x} = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin 2x + \cos 3x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x + 2\sin x\cos x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos 2x + \sin x) = 0.$$

Bài 76. Giải phương trình: $\dfrac{3(\tan x + \sin x)}{\tan x - \sin x} - 2\cos x(1+\cos x) = 2\sin^2 x.$

Chuyên Lê Quý Đôn - QUẢNG TRỊ 2011 lần 2D

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \tan x - \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{3(1+\cos x)}{1-\cos x} - 2\cos x(1+\cos x) = 2\sin^2 x$$
$$\Leftrightarrow 3(1+\cos x) - 2\cos x(1+\cos x)(1-\cos x) = 2\sin^2 x(1-\cos x)$$
$$\Leftrightarrow (1+\cos x)\left[3 - 2\cos x(1-\cos x) - 2(1-\cos x)^2\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow (1+\cos x)(2\cos x + 1) = 0.$$

Bài 77*. Giải phương trình: $\tan\left[\dfrac{\pi}{4}\left(\cos x - \sqrt{3}\sin x\right)\right] + 1 = 0.$

Chuyên Lê Quý Đôn - QUẢNG TRỊ 2012 lần 1A

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}\left(\cos x - \sqrt{3}\sin x\right) = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = -1 + 4k.$$

• Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (1-4k)^2 \leq 1^2 + (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4} \leq k \leq \dfrac{3}{4}$. Do $k\in\mathbb{Z}$ nên ta chọn $k=0$. Khi đó phương trình trở thành : $\cos x - \sqrt{3}\sin x = -1.$

Bài 78. Giải phương trình: $\frac{1}{4}\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = (3\cos x - 2)\left(\sin^2 x + 2\right)$.

Chuyên Lê Quý Đôn - QUẢNG TRỊ 2012 lần 1D

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \sin^2 x\cos^2 x + 2\cos^2 x = (3\cos x - 2)\left(\sin^2 x + 2\right)\\&\Leftrightarrow \cos^2 x\left(\sin^2 x + 2\right) = (3\cos x - 2)\left(\sin^2 x + 2\right)\\&\Leftrightarrow \cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0.\end{aligned}$$

Bài 79. Giải phương trình: $\sqrt{2}\cos 2x = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$.

Chuyên Lê Quý Đôn - QUẢNG TRỊ 2012 lần 2A

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2},\quad k \in \mathbb{Z}$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos 2x\sin x\cos x = \cos x + \sin x\\&\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left[\sqrt{2}(\cos x - \sin x)\sin x\cos x - 1\right] = 0.\end{aligned}$$

Bài 80. Giải phương trình: $2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1 = 3\left(\cos x - \sqrt{3}\sin x\right)$.

Chuyên Lê Quý Đôn - QUẢNG TRỊ 2012 lần 2D

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow 3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 3\left(\cos x - \sqrt{3}\sin x\right)\\&\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)^2 = 3\left(\cos x - \sqrt{3}\sin x\right)\\&\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x + 3\right) = 0.\end{aligned}$$

Bài 81. Giải phương trình:

$$\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)\right].$$

Chuyên Nguyễn Quang Diêu – ĐỒNG THÁP 2012 lần 1A

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \frac{1 + \sin 2x - 2\sin^2 x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\sin x\\&\Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x = (\sin 2x + \cos 2x)\sin x\left(1 + \cot^2 x\right)\\&\Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x = (\sin 2x + \cos 2x)\frac{1}{\sin x}\\&\Leftrightarrow (\sin 2x + \cos 2x)\left(1 - \frac{1}{\sin x}\right) = 0.\end{aligned}$$

Bài 82. Giải phương trình: $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$.

Chuyên Nguyễn Quang Diêu – ĐỒNG THÁP 2012 lần 1D

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$.

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 1\\&\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x - 1 = 0\\&\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x\cos x - \sin^2 x = 0\\&\Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right) = 0.\end{aligned}$$

Bài 83. Giải phương trình: $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}.$

Chuyên Nguyễn Quang Diêu – ĐỒNG THÁP 2012 lần 2A

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}1+2\sin x\neq 0\\1-\sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\x\neq-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\x\neq\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow\ (1-2\sin x)\cos x=\sqrt{3}(1+2\sin x)(1-\sin x)\quad\Leftrightarrow\ \cos x-\sin 2x=\sqrt{3}(\sin x+\cos 2x)$$
$$\Leftrightarrow\ \cos x-\sqrt{3}\sin x=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\quad\Leftrightarrow\ \sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$$

Bài 84. Giải phương trình: $\dfrac{2\cos^3x-2\cos x-\sin 2x}{\cos x-1}=2(1+\cos x)(1+\sin x).$

Chuyên Nguyễn Quang Diêu – ĐỒNG THÁP 2012 lần 2D

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x\neq 1\Leftrightarrow x\neq k2\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ 2\cos^3x-2\cos x-\sin 2x=2(\cos x-1)(1+\cos x)(1+\sin x)\\&\Leftrightarrow\ 2\cos x\left(\cos^2x-1-\sin x\right)=-2\sin^2x(1+\sin x)\\&\Leftrightarrow\ \cos x\left(-\sin^2x-\sin x\right)=-\sin^2x(1+\sin x)\\&\Leftrightarrow\ -\sin x\cos x(1+\sin x)=-\sin^2x(1+\sin x)\\&\Leftrightarrow\ -\sin x(1+\sin x)(\cos x-\sin x)=0.\end{aligned}$$

Bài 85. Giải phương trình: $\dfrac{1+\sin x-\cos^2x}{\sin^2x}.\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)=\tan x+2\sqrt{3}.$

Chuyên Nguyễn Quang Diêu – ĐỒNG THÁP 2012 lần 3A

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\sin x\neq 0\\\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)\neq 0\\\cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{k\pi}{2}\\x\neq\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Ta có

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{\cos x}{1+\sin x}.$$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow\ \frac{1+\sin x-\cos^2x}{\sin^2x}\frac{\cos x}{1+\sin x}=\tan x+2\sqrt{3}\quad\Leftrightarrow\ \frac{\sin^2x+\sin x}{\sin^2x}\frac{\cos x}{1+\sin x}=\tan x+2\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{\sin x+1}{\sin^2x}\frac{\cos x}{1+\sin x}=\tan x+2\sqrt{3}\quad\Leftrightarrow\ \cot x=\tan x+2\sqrt{3}.$$

Bài 86. Giải phương trình:

$$\sqrt{2}(2\sin x-1)=4(\sin x-1)-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Chuyên Nguyễn Quang Diêu – ĐỒNG THÁP 2012 lần 3D

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ \sqrt{2}(2\sin x-1)=4(\sin x-1)-\sqrt{2}\sin\left(2x+\tfrac{\pi}{2}\right)\\&\Leftrightarrow\ 2\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}=4(\sin x-1)-\sqrt{2}\cos 2x\\&\Leftrightarrow\ 2\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}=4(\sin x-1)-\sqrt{2}\left(1-2\sin^2x\right)\\&\Leftrightarrow\ 2\sin^2x+\left(2\sqrt{2}-2\right)\sin x-2\sqrt{2}=0.\end{aligned}$$

Bài 87. Giải phương trình: $\dfrac{\cos x\left(\cos x+2\sin x\right)+3\sin x\left(\sin x+\sqrt{2}\right)}{\sin 2x-1}=1.$

Chuyên HÀ TĨNH 2012 lần 1

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin 2x\neq 1\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad \cos x\left(\cos x+2\sin x\right)+3\sin x\left(\sin x+\sqrt{2}\right)=\sin 2x-1\\&\Leftrightarrow\quad \cos^2x+2\sin x\cos x+3\sin^2x+3\sqrt{2}\sin x=\sin 2x-1\\&\Leftrightarrow\quad 2\sin^2x+3\sqrt{2}\sin x+2=0.\end{aligned}$$

Bài 88. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{8+\cos 3x}{2-\cos x}}=-2\sin x.$

Chuyên HÀ TĨNH 2012 lần 2

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\sin x\leq 0\Leftrightarrow \pi+k2\pi\leq x\leq 2\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad \frac{8+\cos 3x}{2-\cos x}=4\sin^2x &&\Leftrightarrow\quad 8+\cos 3x=4\left(1-\cos^2x\right)\left(2-\cos x\right)\\&\Leftrightarrow\quad 8+4\cos^3x-3\cos x=4\left(1-\cos^2x\right)\left(2-\cos x\right) &&\Leftrightarrow\quad 8\cos^2x+\cos x=0\ .\end{aligned}$$

Bài 89. Giải phương trình: $\sin^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{7\pi}{4}\right)\tan^2\left(3\pi-x\right)-\cos^2\dfrac{x}{2}=0.$

Chuyên HÀ TĨNH 2012 lần 3

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos\left(3\pi-x\right)\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)\right]\tan^2x-\frac{1}{2}\left(1+\cos x\right)=0 &&\Leftrightarrow\quad \left(1-\sin x\right)\frac{\sin^2x}{\cos^2x}-\left(1+\cos x\right)=0\\&\Leftrightarrow\quad \frac{\sin^2x}{1+\sin x}-\left(1+\cos x\right)=0 &&\Leftrightarrow\quad \sin^2x-\left(1+\cos x\right)\left(1+\sin x\right)=0\\&\Leftrightarrow\quad \left(1+\cos x\right)\left[\left(1-\cos x\right)-\left(1+\sin x\right)\right]=0 &&\Leftrightarrow\quad \left(1+\cos x\right)\left(\sin x+\cos x\right)=0\ .\end{aligned}$$

Bài 90. Giải phương trình: $\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{4\cos^2 2x}{\tan x-\cot x}.$

Chuyên Lương Văn Chánh - PHÚ YÊN 2010 A

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\begin{cases}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0\\\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0\\\cos x\neq 0\\\sin x\neq 0\\\tan x\neq\cot x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\\x\neq\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\\x\neq\dfrac{k\pi}{2}\\x\neq\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Ta có

$$\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1.$$

• Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad -1=\frac{4\cos^2 2x}{\tan x-\cot x} &&\Leftrightarrow\quad \cot x-\tan x=4\cos^2 2x\\&\Leftrightarrow\quad \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=4\cos^2 2x &&\Leftrightarrow\quad \frac{\cos 2x}{\sin x\cos x}=4\cos^2 2x\\&\Leftrightarrow\quad \cos 2x=4\cos^2 2x\sin x\cos x &&\Leftrightarrow\quad \cos 2x\left(1-4\cos 2x\sin x\cos x\right)=0\\&\Leftrightarrow\quad \cos 2x\left(1-2\cos 2x\sin 2x\right)=0 &&\Leftrightarrow\quad \cos 2x\left(1-\sin 4x\right)=0.\end{aligned}$$

Bài 91. Giải phương trình: $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + 1 = \sqrt{3}\sin x + \cos x.$

Chuyên Lương Văn Chánh - PHÚ YÊN 2010 B

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 3\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + \cos^2 x = \sqrt{3}\sin x + \cos x\\
&\Leftrightarrow\ \left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right)^2 = \sqrt{3}\sin x + \cos x\\
&\Leftrightarrow\ \left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right)\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 1\right) = 0.
\end{aligned}$$

Bài 92. Giải phương trình: $\sqrt{2}\cos 3x + 2\sin^2 x = 1 + \sin 2x.$

Chuyên Lương Văn Chánh - PHÚ YÊN 2010 D

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \sqrt{2}\cos 3x = 1 - 2\sin^2 x + \sin 2x\\
&\Leftrightarrow\ \sqrt{2}\cos 3x = \cos 2x + \sin 2x\\
&\Leftrightarrow\ \sqrt{2}\cos 3x = \cos 2x + \sin 2x\\
&\Leftrightarrow\ \sqrt{2}\cos 3x = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Bài 93*. Giải phương trình: $\sin^2 4x \sin\frac{3}{2}x + \cos^4 x - 1 = \cos^2 x.$

Chuyên Lương Văn Chánh - PHÚ YÊN 2011 lần 1A

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \sin^2 4x \sin\frac{3}{2}x = \cos^2 x - \cos^4 x + 1\\
&\Leftrightarrow\ \sin^2 4x \sin\frac{3}{2}x = \cos^2 x\left(1 - \cos^2 x\right) + 1\\
&\Leftrightarrow\ \sin^2 4x \sin\frac{3}{2}x = \cos^2 x \sin^2 x + 1\\
&\Leftrightarrow\ \sin^2 4x \sin\frac{3}{2}x = \frac{1}{4}\sin^2 2x + 1. \qquad (*)
\end{aligned}$$

• Ta có

$$\sin^2 4x \sin\frac{3}{2}x \le 1 \quad \text{và} \quad \frac{1}{4}\sin^2 2x + 1 \ge 1.$$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 4x \sin\frac{3}{2}x = 1\\ \sin^2 2x = 0\end{cases}$. Hệ này vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 94. Giải phương trình: $2\sin^2 x + \sin 2x = 2\sqrt{2}\sin x \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right).$

Chuyên Lương Văn Chánh - PHÚ YÊN 2011 lần 1D

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 2\sin x\left(\sin x + \cos x\right) = 2\sin x\left(\sin 3x + \cos 3x\right)\\
&\Leftrightarrow\ 2\sin x\left[\left(\sin x + \cos x\right) - \left(\sin 3x + \cos 3x\right)\right] = 0.
\end{aligned}$$

Bài 95. Giải phương trình: $\cos x - \sin x + \cos 2x + \sin 2x = 1 + \cos 3x.$

Chuyên Lương Văn Chánh - PHÚ YÊN 2013 lần 1

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \left(\cos x - \cos 3x\right) - \sin x + \left(\cos 2x - 1\right) + \sin 2x = 0\\
&\Leftrightarrow\ 2\sin 2x \sin x - \sin x - 2\sin^2 x + 2\sin x \cos x = 0\\
&\Leftrightarrow\ \sin x\left(2\sin 2x - 1 - 2\sin x + 2\cos x\right) = 0\\
&\Leftrightarrow\ \sin x\left[2\left(\cos x - \sin x\right) + 4\sin x \cos x - 1\right] = 0.
\end{aligned}$$

Bài 96*. Giải phương trình: $2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\sin x = 1.$

Chuyên Vĩnh Phúc - 2011 lần 3A

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\left[\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\left(2x-\frac{5\pi}{12}\right)\right]=1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\left(2x-\frac{5\pi}{12}\right)\right]=\sin\frac{\pi}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(2x-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{5\pi}{12} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(2x-\frac{5\pi}{12}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(2x-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right).$$

Bài 97. Giải phương trình: $\dfrac{\sin^3\frac{x}{2}-\cos^3\frac{x}{2}}{2+\sin x}=\dfrac{1}{3}\cos x.$

Chuyên Vĩnh Phúc - 2011 lần 4D

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right)}{2+\sin x}=\frac{1}{3}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad 3\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right)=\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)(2+\sin x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\left[3\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right)+\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)(2+\sin x)\right]=0.$$

Bài 98. Giải phương trình: $\cos 2x+5=2\left(2-\cos x\right)\left(\sin x-\cos x\right).$

Chuyên Vĩnh Phúc - 2012 lần 3A

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 x+4=4\left(\sin x-\cos x\right)-2\sin x\cos x+2\cos^2 x$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\left(\sin x-\cos x\right)-\sin x\cos x-2=0.$$

Bài 99. Giải phương trình: $\left(1-\tan x\right)\left(1+\sin 2x\right)=1+\tan x.$

Chuyên Vĩnh Phúc - 2012 lần 4A

Hướng dẫn. • Điều kiện : $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$

• Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}\right)\left(\sin x+\cos x\right)^2=\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\cos x-\sin x\right)\left(\sin x+\cos x\right)^2=\left(\cos x+\sin x\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\cos x+\sin x\right)\cos 2x=\left(\cos x+\sin x\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos 2x-1\right)=0.$$

Bài 100*. Giải phương trình: $\sin x-4\sin^3 x+\cos x=0.$

Chuyên Vĩnh Phúc - 2012 lần 4B

Hướng dẫn. • Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \quad -2\sin x+3\sin x-4\sin^3 x+\cos x=0$$
$$\Leftrightarrow \quad -2\sin x+\sin 3x+\cos x=0$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin 3x-\sin x+\cos x-\sin x=0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\cos 2x\sin x+\cos x-\sin x=0$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\cos x-\sin x\right)\left[2\left(\cos x+\sin x\right)\sin x+1\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\cos x-\sin x\right)\left(3\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\right)=0.$$

——— **HẾT** ———